

TESTE de MATEMATICĂ

PENTRU ADMITERE

FACULTATEA DE BIOINGINERIE MEDICALĂ

DISCIPLINA: MATEMATICĂ

IULIE 2020

NOTĂ:

1. Subiectele rezolvate **sunt orientative** și au același **nivel de dificultate** cu cele din **Culegerea de teste de admitere 2020**.
2. Subiectele rezolvate **respectă programa** de concurs pentru disciplina **Matematică**.
3. Pentru o mai **bună pregătire** pentru concurs, **recomandăm** rezolvarea problemelor din **culegerea de teste de admitere 2020**.

Sef de lucrări Dr. Mihai Ilea

Departamentul de Științe Biomedicale, Facultatea de Bioinginerie Medicală,
Universitatea de Medicină și Farmacie „Grigore T. Popa” din Iași

Str. M.Kogălniceanu 9-13, Iași, mihai.ilea@umfiasi.ro ; ileamihai2004@yahoo.com

TEST 1

1. Să se găsească o primitivă F a funcției $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, cu : $F(0) = 3$.

- Funcția $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$ dacă: $F'(x) = f(x)$
- $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx + C \rightarrow F(x) = \ln|x^2 + 1| + C$
- $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} x^2 + 1 = t \rightarrow 2xdx = dt \\ \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 1| + C \end{cases}$
- $F(0) = 3 \rightarrow 3 = \ln 1 + C \rightarrow C = 3$
- $F(x) = \ln|x^2 + 1| + 3$

2. Să se calculeze : $I = \int_0^1 [(x+1)^4 - x^4] dx$.

- $\int_0^1 [(x+1)^4 - x^4] dx = \int_0^1 (x+1)^4 dx - \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 (x+1)^4 dx - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} - \frac{1}{5} = 6$
- $\int_0^1 [(x+1)^4] dx = \begin{cases} x+1 = t \rightarrow dx = dt \\ x=0 \rightarrow t=1, x=1 \rightarrow t=2 \\ \int_1^2 t^4 dt = \frac{31}{5} \end{cases}$

3. Se consideră funcția : $f(x) = x^{2009} + x + 1$. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2010}}$

- $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^{2009} + t + 1)dt = \frac{t^{2010}}{2010} + \frac{t^2}{2} + t$
- $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2010}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^{2010} + 1005t^2 + 2010t}{2010t^{2010}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{2010}$

4. Determinați constantele α, β astfel încât: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(1 - \alpha) + x(-\alpha - \beta) + (1 - \beta)}{x + 1} \right) = 0$
- **Avem condiția:** $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(-1 - \beta) + (1 - \beta)}{x + 1} \right) = 0 \rightarrow -1 - \beta = 0 \rightarrow \beta = -1$

5. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{0}{0}$.
- Am **folosit** formula : $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$.
- $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{4}$.

6. Să se rezolve ecuația : $\begin{vmatrix} 1 & x & \alpha\beta \\ 1 & \alpha & \beta x \\ 1 & \beta & \alpha x \end{vmatrix} = 0$, $\alpha \neq \beta$

- $\begin{vmatrix} 1 & x & \alpha\beta \\ 1 & \alpha & \beta x \\ 1 & \beta & \alpha x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2(\beta - \alpha) + x(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0$

- $x^2 - x(\beta - \alpha) + \alpha\beta = 0 \rightarrow x \in \{\alpha, \beta\}$

7. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze: $(A + B + C)^n, n \geq 3$.

- $X = A + B + C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

- $X^3 = X^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix}$

- Se demonstrează prin inducție că: $(A + B + C)^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = 4^n I_3$.

8. Sistemul de ecuații $\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ are numai soluția nulă $(0, 0, 0)$ dacă:

- Sistemul de ecuații are **numai soluția nulă** $\leftrightarrow \det A \neq 0$

- $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -\alpha^2 + \alpha + 2 \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \{-1, 2\}$

- $\alpha \in R - \{-1, 2\}$

9. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **determine** α **astfel încât** să fie îndeplinită

următoarea **relație** : $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

- $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3+\alpha^2 = 4 \\ 2+2\alpha = 4 \end{cases} \rightarrow \alpha = 1.$

10. Să se afle valorile **pare** ale parametrului α pentru care matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

nu este inversabilă.

- Matricea: A **nu este inversabilă** $\leftrightarrow \det A = 0$.

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha \in \{1, 2\}.$

- $\alpha = 2.$

11. Să se **calculeze**: $I = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx.$

Considerăm : $x^2(x+1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$ cu **multiplicitățile**: $m_1 = 2, m_2 = 1$

Fie : $\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \rightarrow \begin{cases} Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = x+2 \\ A+C=0 \\ A+B=1 \rightarrow A=-1, B=2, C=1 \\ B=2 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx = -\int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = -2 \ln 2 + \ln 3 + 1$$

12. Să se calculeze : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x} + 2} dx$.

- Fie **notația**: $e^x = t \rightarrow x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$.
- **Stabilim capetele de integrare**: $x = 0 \rightarrow t = 1, x = \ln 2 \rightarrow t = 2$.

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x} + 2} dx = \int_1^2 \frac{t}{(t^2 + 2)t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. Să se calculeze : $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$.

Folosim notațiile:
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}.$$

$$I = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

14. Să se rezolve integrala : $I = \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x+1} dx$.

Fie:
$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0, x = 1 \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \left(t + 1 - \frac{t+1}{t^2 + 1} \right) dt = t^2 + 2t - \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} t$$

$$I = 3 - \ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

15. Să se calculeze: $I = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.

Fie :
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = t \rightarrow \frac{x}{x+1} = t^2 \rightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2} \rightarrow dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \\ x=1 \rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}, x=2 \rightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

$$I = 2A \ln|t+1| - \frac{2B}{t+1} + 2C \ln|t-1| - \frac{2D}{t-1} = -\frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2(t-1)}$$

$$\begin{cases} A(t+1)(t-1)^2 + B(t-1)^2 + C(t-1)(t+1)^2 + D(t+1)^2 = t^2 \\ A+C=0 \\ -A+B+C+D=1 \\ -A-2B-C+2D=0 \rightarrow A=-\frac{1}{4}, B=C=D=\frac{1}{4} \\ A+B-C+D=0 \end{cases}$$

TEST 2

1. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 + 3x - 20, \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = -5x^2 - 2x - 2$
- $7x^2 + 5x - 18 = 0 \rightarrow x \in \{-2, \frac{9}{7}\}$

2. Să se **calculeze** determinantul: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$

METODA 1

- Vom **înmulți** prima coloană cu (-1) și o vom **aduna** la coloanele doi și trei.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ yz & z(x-y) & y(x-z) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \\ yz & -z & -y \end{vmatrix}$$

- Vom **înmulți** coloana a treia cu (-1) și o vom **aduna** la a doua coloană.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^2 & x+y & x+z \\ yz & -z & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & y-z & x+z \\ yz & y-z & -y \end{vmatrix} = (y-z) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & x+z \\ yz & 1 & -y \end{vmatrix}$$

- Vom **înmulți** coloana a treia cu (-1) și o vom **aduna** la prima coloană.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -xz & 1 & x+z \\ y(x+z) & 1 & -y \end{vmatrix} = (-xz - yx - yz)$$

- $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(z-y)(xy+xz+yz)$$

METODA 2 : Prin calcul direct

3. Se **consideră** matricea: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $A^n, n \geq 2$ este:

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se **demonstrează** prin **inducție matematică** că: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și polinomul $f(A) = A^2 - 4A + 4I_3$. Să se găsească parametrul x astfel încât : $f(A) = O_3$.

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$f(A) = O_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 & -4x & x \\ -15 & x+4 & -15 \\ -15 & x & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x \notin R$$

- Nu **putem determina** parametrul x .

5. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze numărul: $\det\left(\frac{1}{81} A^4\right)$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$
- $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$
- $\det\left(\frac{1}{81} A^4\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{81} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{81}$

6. Să se calculeze $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ (Integrală cu aplicații în prelucrarea semnalelor)

- Vom **folosi** formulele: $\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$
- Fie **notația**: $tg \frac{x}{2} = t \rightarrow x = 2arctgt \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
- $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int \frac{1}{2(t+2)} dt = \ln|t+2| + C$
- $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} + 1 \right| + C$

7. Fie $f : D \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 + x + 1}$. Să se **determine** parametrul α **știind că** $f'(1) = 0$

- $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (x + \alpha)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2\alpha x + 1 - \alpha}{(x^2 + x + 1)^2}$
- $f'(1) = 0 \leftrightarrow -\frac{3\alpha}{9} = 0 \rightarrow \alpha = 0$

8. Să se calculeze $I = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$, unde $x \in \mathbb{R}$ (**Integrală cu aplicații în epidemiologie**)

- $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx = \begin{cases} x+2 = t \rightarrow dx = dt \\ \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctg t + C \end{cases}$
- $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \arctg(x+2) + C$

9.. Fie funcția : $f(x) = \ln(1+x+x^2)$. Să se calculeze $f'(9)$.

- $f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2} (1+x+x^2)' = \frac{2x+1}{1+x+x^2}$
- $f'(9) = \frac{19}{91}$

10. Să se găsească punctul **de minim** al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1$

- **Punctele de extrem** local se află **printre rădăcinile** ecuației: $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 12x^2 - 12x - 24 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$ sunt **puncte critice**
- Pentru $x \in [-1, 2]$ funcția f este **decreșcătoare**.
- Pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ funcția f este **crescătoare**.
- $x = 2$ (**minim**) $\rightarrow A(2, -39)$

11. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin x)}{\tg x}$

Știm că : $\sin \pi = 0 \rightarrow \sin(\sin \pi) = 0, \tg \pi = 0 \rightarrow$ **Avem nedeterminarea:** $\frac{0}{0}$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(\sin x) \cdot \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -1, \text{ deoarece : } \cos(\sin \pi) = 1$$

12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Să se **determine o primitivă** F a funcției f știind că **graficul acesteia** (al primitivei) **conține** punctul $M(1, 4)$

- F este o primitivă a funcției f dacă : $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx + C$
- $F(x) = \int (3x^2 - 4x + 5)dx + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C$
- **Graficul** primitivei **conține** punctul $M(1, 4) \Leftrightarrow F(1) = 4 \rightarrow C = 0$
- $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

13. Fie funcțiile : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ și $F(x) = ax^2 + bx + c$

Să se **determine** constantele reale a, b, c astfel încât $F(x)$ să fie o **primitivă** a funcției f .

- F este o primitivă funcției f dacă : $F'(x) = f(x)$
 $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 2ax + b = 3x - 5 \Leftrightarrow 2a = 3, b = -5 \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -5, c \in \mathbb{R}$

14. Să se **calculeze**: $I = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^4)} dx$

Fie :
$$\begin{cases} x = -t \rightarrow dx = -dt \\ x = -1 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$$

$$I = - \int_1^{-1} \frac{\operatorname{tg}(-t)}{\ln(1+(-t)^4)} dt = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg}(-t)}{\ln(1+(-t)^4)} dt = - \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg}(t)}{\ln(1+t^4)} dt = -I \rightarrow 2I = 0$$

$$I = 0$$

15. Fie $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. Să se **calculeze** : $f'(\frac{\pi}{4})$

- $f'(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{2 \sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{\sin x}$
- $f'(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$

TEST 3

1. Fie integrala : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$. Să se **calculeze** $S = I_4 + 3I_3 + 2I_2$

- **Considerăm:** $I_4 = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} dx.$

- Deoarece avem o **combinație liniară de integrale**, vom încerca să scriem toată suma sub o **singură integrală** astfel:

- $$S = \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \frac{x^2(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2. Fie $f : D \rightarrow R, f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 + x + 1}$. Să se determine parametrul α știind că $f'(1) = 0$.

- **Folosim formula:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

- $$f'(x) = \frac{(x + \alpha)'(x^2 + x + 1) - (x + \alpha)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 + x + 1 - (2x + 1)(x + \alpha)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

- $$f'(1) = \frac{3 - 3(1 + \alpha)}{9} = 0 \rightarrow 3 - 3(1 + \alpha) = 0 \rightarrow 1 - \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0$$

3. Să se **calculeze** limita: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{(x-1)(x+2)}$

- **Verificăm** dacă avem un caz de **nedeterminare**: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 8) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x-1)(x+2) = 0 \end{cases}$
- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{0}{0}$. Folosim **regula lui L'Hospital**
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^3 + 8)'}{(x^2 + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{2x + 1} = -4.$

4. Fie funcția : $f: R - \{-3, 1\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$.

Să se scrie **asimptota orizontală** la graficul funcției.

- Calculăm: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)'}{(x^2+2x-3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{\infty} = 0$
- Vom spune că $y = 0$ este **asimptota orizontală** la $\pm \infty$.

5. Să se **calculeze** : $I = \int \frac{dx}{x(x+2)}$.

- $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \rightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A}{x(x+2)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow B = -\frac{1}{2}$
- $\int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$

6. Se **consideră** matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci A^n este de forma:

- $A^2 = A \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$
- Se **demonstrează prin inducție matematică** că: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

7. Se **consideră** matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și polinomul $f(x) = x^2 - 10x + 16$.

Calculați : $f(A)$

- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2$
- $A^2 = A \bullet A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $f(A) = O_3$

8. Să se **calculeze** : $D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

- **Adunăm** primele două linii la **prima linie** : $\Delta = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.
- $D = (2x+2y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)(xy - y^2 - x^2) = -2(x^3 + y^3)$.

9. Să se determine **valorile naturale** ale parametrului p astfel încât:

$$\text{rang}(A + A^t) = 1, \text{ unde: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 4 \end{pmatrix}$$

- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2+p \\ p+2 & 8 \end{pmatrix}.$
- Matricea B fiind de ordinul al doilea, $\text{rang} B = 2 \Leftrightarrow \det B = 0.$
- $\begin{vmatrix} 2 & 2+p \\ 2+p & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 16 - (p+2)^2 = 0 \rightarrow p+2 = \pm 4 \rightarrow p \in \{2, -6\}.$
- $p \in \mathbb{N} \rightarrow p = 2.$

10. Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **Adunăm** primele două linii la **prima linie** : $\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}.$
- $\Delta = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+2)(2x+1-x^2-1-1) = (x+2)(-x^2+2x-1).$
- $\Delta = 0 \rightarrow x \in \{-2, 1\}.$
- $x \in \mathbb{N} \rightarrow x = 1.$

11. Să se **calculeze**: $l = \lim_{\substack{x \rightarrow 1, \\ x > 1}} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$

- Avem **nedeterminarea**: $\frac{0}{0}.$
- $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 1, \\ x > 1}} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 1, \\ x > 1}} \frac{e^{x-1}}{x} = \frac{1}{2}.$

12. Să se calculeze : $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$

• **Notăm :** $\ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=e \rightarrow t=1 \end{cases}$

• $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln 2$

Am folosit: $\int \frac{u(t)}{u'(t)} dt = \ln|u(t)| + C$

13. Să se calculeze : $J = \int x^2 \cdot \arctg \frac{1}{x} dx$.

Considerăm:
$$\begin{cases} f(x) = \arctg \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \cdot (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2 + 1} \\ g'(x) = x^2 \rightarrow g(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{cases} \quad \therefore$$

$$J = \int x^2 \cdot \arctg \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctg \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$J_1 = \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int (x - \frac{x}{x^2 + 1}) dx = \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

$$J = \int x^2 \cdot \arctg \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctg \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot \ln(x^2 + 1).$$

14. Să se calculeze: $I = \int_2^3 \frac{x+1}{(x^2-1)(x^2+1)} dx$.

Fie: $\frac{x+1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$

$$I = A \ln|x+1| + B \ln|x-1| + \frac{1}{2} \cdot C \ln(x^2+1) + D \arctg x.$$

$$I = A \ln \frac{4}{3} + B \ln 2 + \frac{C}{2} \ln 5 + D(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2).$$

$$A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) = x+1 \rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B+D=0 \\ A+B-C=1 \\ -A+B-D=1 \end{cases}.$$

Din **prima** și a **treia** ecuație a sistemului **obținem**: $-2C=1 \rightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Din a **doua** ecuație și a **patra** ecuație a sistemului **obținem**: $-2D=1 \rightarrow D=-\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} A+B=\frac{1}{2} \\ -A+B=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow 2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2} \rightarrow A=0.$$

$$I = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2).$$

15. Să se calculeze: $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4+x^2} dx$.

Facem **notația**:
$$\begin{cases} x^2 = t \rightarrow 2x dx = dt \\ x=0 \rightarrow t=0, x=1 \rightarrow t=1 \\ t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ t + \frac{1}{2} = u \rightarrow dt = du \\ t=0 \rightarrow u = \frac{1}{2}, t=1 \rightarrow u = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

TEST 4

1. Să se **calculeze** $I = \int_1^2 (x-1)(2-x)dx$

- $I = \int_1^2 (x-1)(2-x)dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx = -\int_1^2 x^2 dx + 3\int_1^2 x dx - 2\int_1^2 dx$
- $I = -\frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{6}.$

2. Să se **calculeze** : $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x+1} dx$

- **Facem** notația : $x+1=t \rightarrow x=t-1 \rightarrow dx=dt$
- Dacă $x=0 \rightarrow t=1, x=1 \rightarrow t=2$
- $\int_1^2 \frac{1}{t} \ln t = \int_0^{\ln 2} u du = \frac{\ln^2 2}{2}$
- Fie **schimbarea de variabilă**: $\ln t = u \rightarrow \frac{1}{t} dt = du$
- Dacă $t=1 \rightarrow u=0, t=2 \rightarrow u=\ln 2$

3. Se dă funcția: $f(x) = \ln^2(x-3), x \geq 3$. Să se **calculeze** : $f'(4)$.

- **Folosim** formulele: $(u^2)' = 2uu', (\ln u)' = \frac{1}{u} u'$, unde u este o **funcție compusă** .
- $f'(x) = (\ln^2(x-3))' = 2\ln(x-3)(\ln(x-3))' = 2\ln(x-3) \frac{1}{x-3}.$
- $f'(4) = 0.$

4. Să se afle **funcția polinomială** de gradul **trei** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \theta x + \pi$ care **verifică** relațiile: $f(-1) = -6$, $f'(1) = -3$, $f''(2) = 4$.

- $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \theta \rightarrow f'(1) = 3\alpha + 2\beta + \theta = -3$.
- $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \rightarrow f''(2) = 12\alpha + 2\beta = 4$.
- $f(-1) = -\alpha + \beta - \theta + \pi = -6$.
- $$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \theta = -3 \\ 6\alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta + \theta - \pi = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 6\alpha \\ 9\alpha - \theta = 7 \\ 7\alpha + \theta = 8 + \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16\alpha = 15 + \pi \\ \theta = 9\alpha - 7 \\ \beta = 2 - 6\alpha \end{cases}.$$
- $\alpha = 1, \beta = -4, \theta = 2, \pi = 1 \rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$.

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - 1}$. Să se **determine** parametrul α **știind** că **graficul** funcției f **are asimptota**: $y = x - 1$.

- **Folosim formulele pentru asimptote oblice:**
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}.$$
- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \alpha x}{x(x - 1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \alpha}{2x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$.
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\alpha + 1)}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha + 1$.
- $\alpha + 1 = -1 \rightarrow \alpha = -2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Să se **calculeze** : $(A(2) - A(0))^{2016}$.

- $$B = A(2) - A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$
- $B^{2016} = (B^3)^{672} = (O_3)^{672} = O_3.$

7. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x(x+y+z) = 6 \\ y(x+y+z) = 12 \\ z(x+y+z) = 18 \end{cases}$. Atunci **soluția naturală** a sistemului este:

- Dacă **adunăm** toate ecuațiile sistemului : $(x+y+z)^2 = 36 \rightarrow x+y+z = \pm 6.$
- Dacă $x+y+z = 6 \rightarrow x=1, y=2, z=3.$
- Dacă $x+y+z = -6 \rightarrow x=-1, y=-2, z=-3.$
- $S = \{(1,2,3)\}.$

8. Să se **determine** matricele A, B știind că:

$$\begin{cases} A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2A-4B = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5B = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \\ & \bullet \quad \begin{cases} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}. \end{aligned}$$

9. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & x \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se **determine** valorile parametrului x pentru care matricea A nu este **inversabilă**.

- A nu este **inversabilă** $\leftrightarrow \det A = 0$.
- $\det A = 0 \leftrightarrow 23 + x = 0 \rightarrow x = -23$.
- A nu este **inversabilă** $\leftrightarrow x = -23$.

10. Să se **rezolve** următoarea ecuație : $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$.

- $\Delta = (1-x)(1-2x)(1-3x) - x^2(1-2x) = (1-2x)(2x^2 - 4x + 1) = 0$.
- $x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right\}$.

11. Să se **calculeze**: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

Avem **nedeterminarea**: $\frac{0}{0}$.

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos x}{5x^4} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x \cdot \cos x}{4x^3} =$$

$$l = \frac{3}{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{3}{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{20} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\rightarrow l = \frac{1}{20} \text{ deoarece avem } \textbf{limita fundamentală: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

12. Să se **rezolve** : $J = \int x \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

Considerăm:
$$\begin{cases} f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \rightarrow f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' = \frac{2}{(1-x)(1+x)} \\ g'(x) = x \rightarrow g(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$J = \int x \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} + \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} dx.$$

$$J_1 = \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Am folosit formula: $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

$$J = \frac{x^2}{2} \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

13. Să se calculeze: $I = \int_2^3 \frac{x+1}{(x^2-1)^2} dx.$

$$\frac{x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Atunci :
$$\begin{cases} I = A \ln|x+1| + B \ln|x-1| - \frac{C}{x-1} \\ I = A \ln \frac{4}{3} + B \ln 2 + \frac{C}{2} = \frac{1}{4} \ln \frac{4}{3} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2x-2} \end{cases}$$

$$A(x-1)^2 + B(x^2-1) + C(x+1) = 1 \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=0 \\ A-B+C=1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=2A \\ A-B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \rightarrow A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{2}.$$

14. Fie $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 5^x + \alpha^x}{3^x + 5^x}.$ Să se **determine** $\alpha > 0$ **astfel încât** : $l = 0.$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 5^x + \alpha^x}{3^x + 5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^x \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x + 1 \right]}{5^x \left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^x \cdot \frac{\left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x + 1 \right]}{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1 \right]}.$$

Dacă : $\alpha = 2 \rightarrow l = 0.$

Dacă : $\alpha = 3 \rightarrow l = 0.$

Dacă : $\alpha = 5 \rightarrow l = 1.$

Dacă : $\alpha > 5 \rightarrow l = +\infty$.

Dacă : $\alpha \in (0,5) \rightarrow l = 0$.

15. Să se calculeze: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2019}}{1 - x^2 + x^4 - x^8 + \dots - x^{2018}} dx$.

a. Se observă că **atât numărătorul cât și numitorul** sunt **progresii geometrice** cu rațiile x^2 respectiv $(-x^2)$.

b. **Vom folosi** formula: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, unde $q, a_1, a_2, \dots, a_n$ **reprezintă**

rația progresiei geometrice, respectiv **termenii** progresiei geometrice.

$$c. \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018} = \frac{x^{4036} - 1}{x^2 - 1} \\ 1 - x^2 + x^4 - x^8 + \dots - x^{2018} = \frac{x^{4036} - 1}{-x^2 - 1} \end{cases}.$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(-x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx = - \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x^2 - 1} dx \right) = \frac{x^2}{2} + \ln|x^2 - 1|.$$

$$I = -\frac{1}{8} - \ln \frac{3}{4}.$$

TEST 5

1. Să se **rezolve** ecuația integrală : $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt = -6$.

- $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt = 3 \int_0^x t^2 dt - 4 \int_0^x t dt - 5 \int_0^x 1 dt = x^3 - 2x^2 - 5x$.
- $x^3 - 2x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
- **Căutam** soluțiile ecuației printre **divizorii** termenului liber: $D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
- $x \in \{-2, 1, 3\}$.

2. Să se **calculeze** : $I = \int_2^5 \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} dx$.

- Fie **substituția**: $x-1=t \rightarrow x=t+1 \rightarrow dx=dt$.
- **Dacă** : $x=2 \rightarrow t=1, x=5 \rightarrow t=4$.
- $\int_1^4 \frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 5}{t} dt = \int_1^4 \frac{t^2 + 4}{t} dt = \int_1^4 t dt + 4 \int_1^4 \frac{1}{t} dt = \frac{15}{2} + 8 \ln 2$.

3. Să se **calculeze** : $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 + x - 2}$.

- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{0}{0}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(2x-1))'}{(x^2 + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2}{3}$.

4. Se dă funcția $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$. Să se calculeze $f'(1)$.

- Se observă că f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
- f este derivabilă în punctul $x = 1$ dacă: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x)$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = 2 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 1$.
- Nu putem calcula $f'(1)$.

5. Fie funcția : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. Să se calculeze $f'(1)$.

- Folosim formula : $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$.
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$.
- $f'(1) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

6. Să se rezolve ecuația matriceală: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Considerăm $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + 3b \\ c & 2c + 3d \end{pmatrix}$.
- $a = c = 0, b = d \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

7. Să se afle **soluțiile naturale** ale parametrului α pentru care :rang $A=2$, unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Deoarece** $A \in M_3(R)$, $\text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0$.

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 + \alpha - 1 = \alpha(\alpha + 1)$.
- $\text{rang} A = 2 \rightarrow \det A = 0 \rightarrow \alpha \in \{-1, 0\}$.
- $\alpha \in N \rightarrow \alpha = 0$.

8. Să se **determine** matricele X, Y **știind că:**

$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3X + 9Y = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 18 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -16 & 22 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \\ & \bullet \quad \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{11}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} \end{cases}. \end{aligned}$$

9. Pentru ce **valori** ale parametrului α sistemul de ecuații **nu este de tip Cramer**:

$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y + z = 2 \\ \alpha x + y - z = 0 \\ x - 2y - \alpha z = 3 \end{cases}.$$

- Sistemul **nu este de tip Cramer** dacă $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0.$$

- **Căutam** soluțiile ecuației printre **divizorii** termenului liber: $D_4 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.
- $\alpha \in \{-2, -1, 2\}$.

10. Să se determine $X \in M_2(\mathbb{R})$ care **îndeplinește** proprietățile:

$$1. X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. **Suma elementelor** de pe **diagonala principală** este 1.

- **Fie** : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = -1 \\ c(a + d) = 0 \rightarrow c = 0 \vee a + d = 0 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases}$.
- **Dacă** : $c = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1, d^2 = 4 \rightarrow d = \pm 2$.
- **Dacă** : $c = 0, a = 1, d = 2 \rightarrow b = -\frac{1}{3}$.
- **Dacă** : $c = 0, a = -1, d = 2 \rightarrow b = -1 \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- **Dacă** : $c = 0, a = -1, d = -2 \rightarrow b = \frac{1}{3}$
- **Dacă** : $a + d = 0 \rightarrow b(a + d) = 0 \neq -1(F)$

11. Să se calculeze: $l = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{2}{\ln x}}$

Avem **nedeterminarea** : 0^0 .

Vom **folosi** formula: $a^b = e^{b \ln a} \rightarrow l = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{\ln x} \cdot \ln x} = e^2$

12. Să se rezolve : $I = \int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx$

- **Explicităm** modulele : $|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, x < 1 \end{cases}$, $|x+1| = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$
- $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-2}^{-1} (|x-1| + |x+1|) dx + \int_{-1}^1 (|x-1| + |x+1|) dx + \int_1^2 (|x-1| + |x+1|) dx$
- $\int_{-2}^{-1} (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-2}^{-1} (-x+1 - x-1) dx = -2 \int_{-2}^{-1} x dx = 3$
- $\int_{-1}^1 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-1}^1 (-x+1 + x+1) dx = 2 \int_{-1}^1 dx = 4$
- $\int_1^2 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_1^2 (x-1 + x+1) dx = 2 \int_1^2 x dx = 3$
- $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx = 10$

13. Să se calculeze: $I = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$

Se observă că: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 + 1) \rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{(x-1)(x^2 + 1)}$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow \begin{cases} A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 1 \\ A+B=0 \\ -B+C=0 \rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2} \\ A-C=1 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int_0^{-1} \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| = \ln 2, \int_0^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{-1} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$$

14. Se consideră funcția: $f: R \rightarrow R, f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ și F **primitiva** lui f care **satisface:** $F(0) = 0$. Să se **calculeze** $F(1)$.

F **este primitiva** lui f **dacă:** $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$

$$F(x) = \int [x - \ln(x^2 + 1)] dx = \frac{x^2}{2} - \int \ln(x^2 + 1) dx = \frac{x^2}{2} - x \ln(x^2 + 1) + 2x - 2 \arctg x + C$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x^2 + 1) \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + B$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = x - \arctg x + A$$

$$F(0) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x$$

$$\rightarrow F(1) = \frac{1}{2} - \ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2} - \ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

15. Să se calculeze :
$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{2020}^x \sin \frac{1}{t} dt}{\ln x}$$

Se observă că avem nedeterminarea $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ deoarece:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{2020}^x \sin \frac{1}{t} dt = +\infty \end{cases}.$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_{2020}^x \sin \frac{1}{t} dt\right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u}{1} = 1$$

Notăm: $\frac{1}{x} = u \rightarrow$ **Pentru:** $x \rightarrow \infty \rightarrow u \rightarrow 0$

TEST 6

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $(A + B)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este de forma:

- **Notăm** : $C = A + B \rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$
- $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$
- Se **demonstrează** prin **inducție matematică** că: $C^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = 5^n I_2$.
- $(A + B)^n = 5^n I_2$

2. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

- $-2x^2 + 10x - 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x \in \{1, 4\}$

3. Se consideră matricile : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Să se **determine** parametrul α **astfel încât** : $A \cdot B = \alpha \cdot B \cdot A$.

- $X = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix}$

- $Y = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix}$
- $X = \alpha Y \leftrightarrow \alpha = 1$

4. Să se **determine** numerele reale $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu **proprietatea** că:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} + 3\beta \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} \alpha + 3\beta^2 & 2\alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta & \alpha^2 + 3\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta^2 = 4 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} \alpha + 3\beta^2 = 4 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha - 6\beta^2 = -8 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\beta^2 = 3 \rightarrow \beta = \pm 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 5 \end{cases}$
- $\alpha = \beta = 1$

5. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, și funcția : $f(A) = A^2 + 2A + I_2$.

Să se **determine** x , astfel încât : $f(A) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$
- $f(A) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4 & 4x \\ 4x & x^2+4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x^2+4 & 4x \\ 4x & x^2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ 4x = -4 \end{cases} \rightarrow x = -1$

6. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$.

- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(e^x + 1))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

7. Fie : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- Aplicăm **formula integrării** prin părți: $\int_a^b f(x)g(x)'dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

- $$\begin{cases} f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

- $$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = (x^n e^x)_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$$

- $$I_2 + 2I_1 = e$$

8. Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} x + \alpha, x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 3\alpha, x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Să se **determine** constanta α , astfel încât

funcția să fie **continuă** pe R

- f este **continuă** pe intervalele $(-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, +\infty)$, deoarece este funcție de gradul 1.

- Problema se pune în **punctul** : $x = \frac{1}{2}$.

- f este **continuă** în punctul : $x = \frac{1}{2}$ dacă: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} + \alpha, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = 1 - 3\alpha, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \alpha$

- f este **continuă** dacă : $\frac{1}{2} + \alpha = 1 - 3\alpha \rightarrow \alpha = \frac{1}{8}$

9. Fie funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$. Atunci **asimptota oblică** are ecuația :

- Folosim formulele pentru **asimptote oblice**:
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{3x^2 + 8x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x + 8} = \frac{2}{\infty} = 0$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{2x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$
- $y = 1$ este **asimptotă oblică** la $\pm\infty$.

10. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se **calculeze** : $I = \int_0^1 f''(x)dx$

- $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, $f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$
- $\int_0^1 f''(x)dx = \int_0^1 e^x(x+2)dx = e^x(x+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 3e - 2 - (e - 1) = 2e - 1$
- $\begin{cases} f(x) = x + 2 \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$

11. Să se **calculeze**: $l = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{\sin x + 2 \sin 3x}$

Avem **nedeterminarea** : $\frac{0}{0}$.

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{6 \cdot \cos 6x + 2 \cdot \cos 2x}{\cos x + 6 \cdot \cos x} = \frac{8}{7}$$

12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$. Să se determine **valoarea maximă** a funcției f

Pentru a determina **valoarea maximă** a funcției, vom determina **punctele critice**:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$$

Din tabelul de variație a funcției, se observă că f **este crescătoare pe intervalul** $(-1, 0)$ **și descrescătoare pe intervalul** $(0, 1) \rightarrow x = 0$ este **punct de maxim** iar **valoarea**

maximă este: $M = f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

13. Fie $f : R - \{1\} \rightarrow R, f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$. Să se determine **produsul punctelor de extrem**

$$\text{Notăm : } x(1-x)^2 = u \rightarrow f(u) = \sqrt[3]{u} \rightarrow f'(u) = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$$

$$u = x^3 - 2x^2 + x \rightarrow u' = 3x^2 - 4x + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)^2}} \cdot (3x^2 - 4x + 1)$$

$$\text{Determinăm punctele critice : } f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3} \bullet$$

Din **tabelul de variație** a funcției f se observă că : $x_1 = 1$ este **punct de maxim** iar

$x_2 = \frac{1}{3}$ este **punct de minim**.

$$\text{Produsul punctelor de extrem : } P = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$14. \text{ Să se calculeze: } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\ln(1 + \tan x)}$$

$$\text{Avem nedeterminarea : } \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\ln(1 + \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{1 + \tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x = 1$$

$$\text{Deoarece: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan x} = 1 \rightarrow l = 1$$

$$15. \text{ Fie : } f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 4}. \text{ Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de}$$

asimptota oblică a funcției f și **dreptele** $x = 0, x = 3$.

$$\bullet \text{ Folosim formulele pentru asimptote oblice: } \begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^3 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x}{3x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{6x} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x - 4}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = -2.$
- $y = x - 2$ este **asimptotă orizontală** la $\pm\infty$.
- **Fie :** $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 4}, g(x) = x - 2 \rightarrow A = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx.$
- Se **observă** că : $f(x) > g(x), (\forall)x \in [0, 3] \rightarrow A = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$
- $A = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = I - J$
- $J = \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (x - 2) dx = \int_0^3 x dx - 2 \int_0^3 dx = -3$
- $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 4} dx = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2 + 4} dx - 2 \int_0^3 \frac{x^2}{x^2 + 4} dx + 5 \int_0^3 \frac{1}{x^2 + 4} dx = I_1 - 2I_2 + 5I_3$
- $I_3 = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{2}.$
- $I_2 = \int_0^3 \frac{x^2 + 4 - 4}{x^2 + 4} dx = \int_0^3 dx - 4I_3 = 3 - 2 \arctg \frac{3}{2}.$
- $I_1 = \int_0^3 (x - 2 + \frac{-4x + 13}{x^2 + 4x}) = \int_0^3 x dx - 2 \int_0^3 dx - 2 \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 4} dx + 13I_3 = -\frac{3}{2} + \frac{13}{2} \arctg \frac{3}{2} - 2 \ln \frac{13}{4}$
- $I = -\frac{15}{2} + 13 \arctg \frac{3}{2} - 2 \ln \frac{13}{4}$

TEST 7

1. Fie : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$. Să se calculeze aria marginită de graficul funcției, axa (xx') și dreptele $x = 0, x = 2$.

- $A = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) dx = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_0^2 \sqrt{2-x} dx$
- $\int_0^2 \sqrt{x} dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2^3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$
- $\int_0^2 \sqrt{2-x} dx = \begin{cases} 2-x=t \rightarrow dx = -dt, x=0 \rightarrow t=2, x=2 \rightarrow t=0 \\ -\int_2^0 \sqrt{t} dt = \int_0^2 \sqrt{t} dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$
- $A = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

2. Să se calculeze : $I = \int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) dx$

- $\begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 4 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$
- $\int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) = e^x (x^2 + 4x + 3) \Big|_2^3 - \int_2^3 (2x + 4) e^x dx = 24e^3 - 15e^2 - \int_2^3 (2x + 4) e^x dx$
- $\begin{cases} f(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 2 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$
- $\int_2^3 e^x (2x + 4) = e^x (2x + 4) \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 e^x dx = 10e^3 - 8e^2 - 2(e^3 - e^2) = 8e^3 - 6e^2$
- $\int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) = 16e^3 - 9e^2$

3. Fie funcția : $f(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ -x^2, x \leq 0 \end{cases}$. Să se calculeze : $f''(0)$

- Se observă că f este continuă în $x=0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = f(0) = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x, x > 0 \\ -2x, x < 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ -2, x < 0 \end{cases}$
- f este derivabilă în $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f'(x) = 0$
- Vom spune că există f'' în $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f''(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f''(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f''(x) = -2 \rightarrow$ Nu putem calcula : $f''(0)$

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Atunci $f'(0)$ este egal cu :

- $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(0) = 1$

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3, x \leq 1 \\ 2x^2, x > 1 \end{cases}$. Să se afle asimptota orizontală la $+\infty$ a funcției f .

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$
- Deoarece limita nu este finită, nu vom avea asimptotă orizontală.

6. Să se rezolve ecuația : $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

- $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 4x^2 - 5 + x \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$.
- $x \in \{-\frac{5}{4}, 1\}$.

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și polinomul $f(x) = x^2 - 10x + 16$.

Atunci $f(A)$ este:

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}, 10A = \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}, 16I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

8. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze suma: $A + A^2 + \dots + A^9$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^9 = A^8 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^9 = \begin{pmatrix} 9 & S_1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 135 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- $S_1 = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 27 = \frac{(3+27)9}{2} = 135$

9. Să se rezolve ecuația : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

- **Considerăm** : $X \in M_{3 \times 3}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2a_1 & b+2b_1 & c+2c_1 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ 3a+a_1 & 3b+b_1 & 3c+c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$
- $a_1 = -3, b_1 = 0, c_1 = 3, a = 5, b = -2, c = -4 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. Se **consideră** matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea A^{2001} .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $A^{2001} = A^{2000} A = (A^2)^{1000} A = I_2 A = A$
- $A^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

11. Să se **calculeze**: $l = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

Avem **nedeterminarea**: 0^0 . Vom **folosi** formula: $a^b = e^{b \ln a}$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x)} = e^0 = 1$$

Considerăm limita: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = 0$$

12. Să se **calculeze**: $I = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\cos^2 x} dx$.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg}(-1) = 2 \operatorname{tg} 1.$$

Vom face notația: $\begin{cases} x = -t \rightarrow dx = -dt \\ x = -1 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$.

$$J = \int_{-1}^1 \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{t}{\cos^2 t} dt = -\int_{-1}^1 \frac{t}{\cos^2 t} dt = -J \rightarrow 2J = 0 \rightarrow J = 0.$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\cos^2 x} dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{\cos^2 x} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \operatorname{tg} 1.$$

13. Să se calculeze: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx.$

Avem notația:
$$\begin{cases} \sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - (1 - \sin^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du = \arctg u = \arctg 1 - \arctg 0$$

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

14. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{x}.$

Avem nedeterminarea :
$$\frac{0}{0} \rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} \cdot (1 + \operatorname{tg} x)' - \frac{1}{2\sqrt{1 - \operatorname{tg} x}} \cdot (1 - \operatorname{tg} x)'}{x'}$$

Dar : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x}} = 1 \rightarrow l = \frac{1}{2}, \text{ deoarece:}$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{2}$$

15. Să se arate că: $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}, x \in (-\infty, 1).$

Notăm :
$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, g(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4} \\ f(x) = g(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Am arătat că : $f'(x) = g'(x) \rightarrow f(x) = g(x) + C$

Pentru $x = 0 \rightarrow \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + C \rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$

TEST 8

1. Să se calculeze $I = \int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$ (Integrală cu aplicații în dinamica populațiilor)

- $\frac{x^2}{x^4 - 1} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$
- $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} x^2 + 1 = u \rightarrow 2x dx = du \\ \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{cases}$
- $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx = A \ln|x - 1| + B \ln|x + 1| + \frac{1}{2} C \ln(x^2 + 1) + D \arctg x + c$
- $A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1) = x^2$
- $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 1 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$
- $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \ln|x + 1| + \frac{1}{2} \arctg x + c$

2. Să se calculeze **volumul corpului de rotație** obținut prin rotirea graficului funcției $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ în jurul axei OX.

- $V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^1 dx - \pi \int_{-1}^1 x^2 dx = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
- $V = \frac{4\pi}{3}$

3. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2}$

- Avem **nedeterminarea**: $\frac{0}{0} \rightarrow \begin{cases} ((1+3x)^4)' = 4(1+3x)^3(1+3x)' \\ ((1+4x)^3)' = 3(1+4x)^2(1+4x)' \end{cases}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(1+3x)^3 - 12(1+4x)^2}{2x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1+4x)^2}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1+4x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(1+3x)^2 - 8(1+4x)}{1} = 1$
- $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} = 6$

4. Fie funcția : $g(x) = e^x(x^2 + x)$. Să se **calculeze** $g'(2)$

- $g'(x) = (e^x)'(x^2 + x) + e^x(x^2 + x)' = e^x(x^2 + 3x + 1)$
- $g'(2) = 11e^2$

5. Se dă funcția : $f(x) = 9x^3 + 5x^2 + 9x + 11$. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4}$

- $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (9t^3 + 5t^2 + 9t + 11)dt = 9\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + 11x = \frac{27x^4 + 20x^3 + 54x^2 + 132x}{12}$
- $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x^4 + 20x^3 + 54x^2 + 132x}{12x^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$

6. Să se rezolve ecuația :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0, \alpha \neq \beta$$

METODA 1

- Vom înmulți prima coloană cu (-1) și o vom aduna la a doua și a treia linie.

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \beta & x - \alpha & x - \beta \\ x^2 & \alpha^2 - x^2 & \beta^2 - x^2 \end{vmatrix} = (x - \alpha)(x - \beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \beta & 1 & 1 \\ x^2 & -x - \alpha & -x - \beta \end{vmatrix}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \vee x - \beta = 0 \vee (\alpha - \beta) = 0$$

$$\bullet x \in \{\alpha, \beta\}$$

METODA 2: Prin calcul direct.

7. Să se afle soluțiile naturale ale parametrului α pentru care : $\text{rang} A = 2$, unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0, \text{unde } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a + 1) = 0 \rightarrow a = 0 \vee a = -1$$

$$\bullet a \in \mathbb{N} \rightarrow a = 0$$

8. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^{2006}

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
- $A^{2006} = (A^2)^{1003} = (I_3)^{1003} = I_3$

9. Pentru ce valori ale parametrului α sistemul de ecuații nu este de tip Cramer:

$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y + z = 2 \\ \alpha x + y - z = 0 \\ x - 2y - \alpha z = 3 \end{cases}$$

- Sistemul de ecuații nu este de tip Cramer $\Leftrightarrow \det A = 0$
- $\begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2(a + 1) - 4a - 4 = 0 \rightarrow a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0$
- $\alpha^2(\alpha + 1) - 4(\alpha + 1) = 0 \rightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - 4) = 0 \rightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 2 \vee \alpha = -2$
- $\alpha \in \{-2, -1, 2\}$

10. Să se determine matricele A, B știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

11. Fie $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^6 + \beta x^5 + 1}{(x-1)^2}$. Să se găsească valorile parametrilor α, β astfel încât limita l să fie finită.

Considerăm : $P(x) = \alpha x^6 + \beta x^5 + 1, Q(x) = (x-1)^2 \rightarrow \text{grad } P(x) = 6 > \text{grad } Q(x) = 2$

Limita l este finită dacă și numai dacă vom avea o nedeterminare : $\frac{0}{0}$

În acest caz: $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^6 + \beta x^5 + 1) = 0 \rightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \rightarrow \alpha = -\beta - 1$

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-\beta - 1)x^6 + \beta x^5 + 1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(-\beta - 1)x^5 + 5\beta x^4}{2(x-1)}$$

Limita l este finită dacă și numai dacă vom avea o nedeterminare : $\left(\frac{0}{0}\right)$

În acest caz: $\lim_{x \rightarrow 1} 6(-\beta - 1) + 5\beta = 0 \rightarrow \beta = -6 \rightarrow \alpha = 5$.

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{30x^5 - 30x^4}{2(x-1)} = 15 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4}{x-1} = \frac{0}{0} = 15 \lim_{x \rightarrow 1} (5x^4 - 4x^3) = 15.$$

12. Să se calculeze : $I = \int_{-2}^4 \max(x^2, 3x - 2) dx$

$$\text{Fie: } \max(x^2, 3x - 2) = \begin{cases} x^2, x^2 > 3x - 2 \rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \\ 3x - 2, x^2 < 3x - 2 \rightarrow x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$I = \int_{-2}^1 x^2 dx + \int_1^2 (3x - 2) dx + \int_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} = \frac{145}{6}$$

13. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}}$

Avem **nedeterminarea**: 1^∞ , **deoarece**: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x + 2 \sin x - 1)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} ([1 + (\cos x + 2 \sin x - 1)]^{\frac{1}{\cos x + 2 \sin x - 1}})^{\frac{\cos x + 2 \sin x - 1}{x}}$$

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2 \sin x - 1}{x}} = e^2, \text{ **deoarece**: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2 \sin x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x + 2 \cos x) = 2$$

14. Să se calculeze suma : $S = a - b - c$ **știind că :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\alpha + \beta \cos t + \theta \cos 2t) dt}{x^5} = \frac{1}{5}$.

$$\text{Avem nedeterminarea : } \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\alpha + \beta \cos t + \theta \cos 2t) dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta \cos x + \theta \cos 2x}{5x^4}$$

$$\text{Vom avea: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta \cos x + \theta \cos 2x}{x^4} = 1.$$

Pentru ca limita **să fie finită** trebuie sa avem **nedeterminarea** : $\left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \alpha + \beta + \theta = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta \cos x + \theta \cos 2x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\beta \sin x - 2\theta \sin 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\beta \cos x - 4\theta \cos 2x}{12x^2}$$

Pentru ca limita **să fie finită** trebuie sa avem **nedeterminarea** : $\left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow -\beta - 4\theta = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\beta \cos x - 4\theta \cos 2x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta \sin x + 8\theta \sin 2x}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta \cos x + 16\theta \cos 2x}{24} = 1$$

Pentru ca limita **să fie egală cu 1** trebuie ca : $\beta + 16\theta = 24$

$$\text{Fie sistemul: } \begin{cases} \alpha + \beta + \theta = 0 \\ -\beta - 4\theta = 0 \\ \beta + 16\theta = 24 \end{cases} \rightarrow \alpha = 6, \beta = -8, \theta = 2.$$

$$S = a - b - c = 12.$$

15. Să se calculeze : $I = \int_2^3 \frac{x}{x^8 - 1} dx$.

Notăm:
$$\begin{cases} x^2 = t \rightarrow 2x dx = dt \\ x = 2 \rightarrow t = 4, x = 3 \rightarrow t = 9 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x}{x^8 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{t^4 - 1} dt = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{(t^2 - 1)(t^2 + 1)} dt = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} dt$$

$$\frac{1}{(t + 1)(t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} \rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A + B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ -A + B - D = 1 \\ A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_4^9 \frac{1}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} dt = -\frac{1}{4} \int_4^9 \frac{1}{t + 1} dt + \frac{1}{4} \int_4^9 \frac{1}{t - 1} dt - \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\ln \frac{8}{3} - \ln \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{4} (\arctg 9 - \arctg 4)$$

TEST 9

1. Să se **determine** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(0)=2$ **știind că** : $f'(x)=2x+1$

- **Folosim formula:** $f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int g(x)dx + C$
- $f'(x) = 2x+1 \rightarrow f(x) = \int (2x+1)dx + C = x^2 + x + C$
- $f(0) = 2 \rightarrow f(0) = C = 2$
- $f(x) = x^2 + x + 2$

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \alpha x + 1$. Să se **determine** $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care **tangenta** la graficul funcției f în punctul $x_0 = 1$ **trece** prin punctul $M(2, 1)$.

- **Ecuția tangentei** în punctul $A(x_0, y_0)$ este: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
- $f'(x) = 3x^2 + \alpha \rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 + \alpha, y_0 = f(1) = 2 + \alpha$
- **Ecuția tangentei** devine: $y = (3 + \alpha)(x - 1) + 2 + \alpha$
- $M(2,1) \in d \leftrightarrow 1 = (3 + \alpha) + 2 + \alpha \rightarrow 2\alpha = -4 \rightarrow \alpha = -2$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x + 1}$. Să se **determine** parametrul α știind că graficul funcției f **are un extrem** în punctul $x = -3$.

- f **are un extrem** în punctul x_0 **dacă:** $f'(x_0) = 0$
- $f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(x + 1) - (x^2 + \alpha x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \alpha}{(x + 1)^2}$
- $f'(-3) = 0 \rightarrow 9 - 6 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -3$

4. Determinați constantele α, β astfel încât: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + \alpha}{x-1} - \beta x \right) = \alpha$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + \alpha}{x-1} - \beta x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2-\beta) + x(3+\beta) + \alpha}{x-1} = \alpha$
- Limita este finită $\Leftrightarrow 2-\beta=0 \rightarrow \beta=2$.
- Pentru $\beta=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+\alpha}{x-1} = \alpha \rightarrow \alpha=5$.

5. Să se calculeze $I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ (Integrala cu aplicații în dinamica celulelor canceroase)

- Fie substituția: $\ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$
- $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$
- $I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$

6. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$. Să se afle soluțiile naturale ale ecuației: $\det(A+U) = 2$

- $A+U = \begin{pmatrix} 4+u & -6 \\ 2 & u-3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A+U) = (u+4)(u-3) + 12 = 2$
- $u^2 + u - 2 = 0 \rightarrow u \in \{-2, 1\}$
- $u \in \mathbb{N} \rightarrow u = 1$

7. Sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 2\alpha x+\alpha^2 y+3z=3\alpha \end{cases}$ are soluție unică dacă:

- **Sistemul de ecuații are soluție unică** dacă: $\det A \neq 0$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\alpha & \alpha^2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -\alpha^2 + 10\alpha - 9 \neq 0$$

- $\alpha \in R - \{1, 9\}$

8. Să se **rezolve** sistemul:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

- **Considerăm:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rang A = 1 \rightarrow$ **există un minor** de ordin 1 nenul.

- Vom considera x ca **variabilă principală** iar y, z ca variabile **secundare**
- $x = 1 - y - z \rightarrow S = \{(1 - y - z, y, z), y \in R, z \in R\}$
- Pentru $y = 1, z = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow S = \{(-1, 1, 1)\}$

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Atunci** $A^n, n \geq 2$ are forma :

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

- $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

- Se **demonstrează** prin **inducție matematică** că:
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

10. Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației: $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2$.

- $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 \neq 2$.
- Ecuația **nu are soluții**.

11. Să se **determine funcțiile derivabile** : $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care **verifică** :

$$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x), (\forall)x \geq 0 \quad (1)$$

Pasul 1: Dacă în relația 1, considerăm $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

Pasul 2: Vom deriva ambii membri ai relației (1) astfel:

$$1 + f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x+1} dx + C$$

$$f(x) = \ln(x+1) + C \Leftrightarrow f(0) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow f(x) = \ln(x+1)$$

12. Se **consideră** funcția: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ și F **primitiva** lui f care **satisface**: $F(1) = 0$. Să se **calculeze** $F(-1)$.

F **este primitiva** lui f **dacă**: $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx + C$.

$$F(x) = \int (x-1)^2(x+1)dx + C = \int (x^3 - x^2 - x + 1)dx + C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

$$F(1) = 0 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + C = 0 \rightarrow C = -\frac{5}{12} \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{12}.$$

$$\text{Atunci: } F(-1) = -\frac{4}{3}.$$

13. Să se calculeze: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (tg^2 x + 1) dx$

$$1 + tg^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (tg x)' dx = tg \frac{\pi}{3} - tg \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1$$

14. Să se calculeze: $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2 + 3} dx \quad x=3/t$

Fie :
$$\begin{cases} x = \frac{3}{t} \rightarrow dx = -\frac{3}{t^2} dt \\ x = 1 \rightarrow t = 3, x = 3 \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_3^1 \frac{\ln \frac{3}{t}}{\frac{9}{t^2} + 3} \left(-\frac{3}{t^2}\right) dt = 3 \cdot \int_1^3 \frac{\ln 3 - \ln t}{3t^2 + 9} dt = \int_1^3 \frac{\ln 3}{t^2 + 3} dt - I \rightarrow 2I = \ln 3 \int_1^3 \frac{1}{t^2 + 3} dt$$

$$I = \frac{\ln 3}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{\ln 3}{2\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3})$$

15. Suma valorilor parametrului α , pentru care : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 x^2 + 1}}{3x+2} = -1$

este egală cu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 x^2 + 1}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 [(\alpha-1)^2 + \frac{1}{x^2}]}}{x(3 + \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{(\alpha-1)^2}}{3x} = -\frac{1}{3} |\alpha-1|$$

Vom avea: $-\frac{|\alpha-1|}{3} = -1 \rightarrow |\alpha-1| = 3 \rightarrow \alpha-1 = \pm 3 \rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 4$

$$S = 2$$

TEST 10

1. Să se **rezolve** sistemul:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -9$$
- $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 2, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 1, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-9} = 1.$$

2. Să se **rezolve** ecuația :
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

- $$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 2x, \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 180 \rightarrow 2x^2 - 2x - 180 = 0.$$
- $$x^2 - x - 90 = 0 \rightarrow x \in \{-9, 10\}.$$

3. Să se **calculeze** :
$$\Delta = \begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

METODA 1

- **Adunăm** liniile doi și trei la **prima linie**

- $$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

- Vom **înmulți** coloana unu cu (-1) și **o vom aduna** la coloanele doi și trei.

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2b & -b-c-a & 2b \\ 2c & 0 & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

METODA 2: Prin calcul direct

4. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Dacă $A \in M_{m \times n}(R)$, $B \in M_{n \times p}(R) \rightarrow A \cdot B \in M_{m \times p}(R)$

- Fie: $X \in M_{2 \times 1}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a-2b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ a-2b=1 \\ a=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

- $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \geq 2$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin inducție matematică că: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

6. Fie funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, x < 1 \\ \beta x^2 - 1, x \geq 1 \end{cases}$. Să se determine constantele α, β astfel încât funcția să fie derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

- f este continuă în punctul : $x = 1$ dacă: $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 1 + \alpha, \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \beta - 1, f(1) = 1 + \alpha$
- f este continuă dacă : $1 + \alpha = \beta - 1 \rightarrow \alpha - \beta = -2$
- $f'(x) = \begin{cases} \alpha, x < 1 \\ 2\beta x, x > 1 \end{cases}$
- f este derivabilă în punctul : $x = 1$ dacă: $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f'(x) \rightarrow \alpha = 2\beta$
- $\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -4 \end{cases}$

7. Să se calculeze: $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (Integrala cu aplicații în dinamica populațiilor)

- Notăm : $\arcsin x = t \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$.
- $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$.

8. Să se calculeze : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

- $\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x \rightarrow g(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi - 2}{2}.$

9. Să se calculeze **volumul** corpului de rotație obținut prin **rotirea** graficului funcției $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ în jurul axei **OX**.

- $V = \pi \int_0^2 f^2(x) \, dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2) \, dx = \pi \int_0^2 x^2 \, dx + 2\pi \int_0^2 1 \, dx = \frac{8\pi}{3} + 4\pi$
- $V = \frac{20\pi}{3}.$

10. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2^x} + (0,3)^x - 3 \right]$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, deoarece : $0 < \frac{1}{2} < 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (0,3)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10}\right)^x = 0$, deoarece : $0 < \frac{3}{10} < 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^x} + (0,3)^x - 3\right) = -3.$

11. Să se calculeze : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x} \, dx.$

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{x \sin x + \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{x^2 + \cos^2 x}{\cos^2 x}} \, dx = I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{x \sin x + \cos x}{\cos^2 x}}{\left(\frac{x}{\cos x}\right)^2 + 1} \, dx = I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\cos x}\right)'}{\left(\frac{x}{\cos x}\right)^2 + 1} \, dx =$
- **Considerăm:** $\left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}, \frac{x}{\cos x} = u \rightarrow \left(\frac{x}{\cos x}\right)' \, dx = du.$

- **Dacă** $x = 0 \rightarrow u = 0, x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{2\pi}{3}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\cos x}\right)'}{\left(\frac{x}{\cos x}\right)^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{3}.$$

12. Să se calculeze : $I = \int_{-1}^1 x \ln(1 + e^x) dx.$

Considerăm: $\begin{cases} x = -t \rightarrow dx = -dt \\ x = -1 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}.$

$$I = \int_{-1}^1 x \ln(1 + e^x) dx = \int_1^{-1} t \ln(1 + \frac{1}{e^t}) dt = - \int_{-1}^1 t (\ln(1 + e^t) - t) = -I + \int_{-1}^1 t^2 dt = -I + \frac{2}{3}.$$

$$I = \frac{1}{3}.$$

13. Să se calculeze: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} dx$

Fie: $\begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = t \rightarrow -2 \cos x \cdot \sin x = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + 3 \cos^2 x} dx = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + 3 \cos^2 x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{1 + 3t^2}$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{1 + 3t^2} = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(t\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

14. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$

Avem cazul de **nedeterminare**: $0^\infty \rightarrow f^g = e^{g \cdot \ln f}$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{\ln x}} = e^2$$

15. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție de două ori derivabilă astfel încât:

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \text{ unde: } f(1) = f'(1) = 0.$$

- Deoarece: $f''(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \int \frac{1}{x} dx + C_1 \rightarrow f'(x) = \ln x + C_1$
- Dar: $f'(1) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow f'(x) = \ln x$
- Deoarece: $f'(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \int \ln x dx + C_2 \rightarrow f(x) = x \ln x - x + C_2$
- Fie: $\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C_3 \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$
- Dar: $f(1) = 0 \rightarrow C_2 = 1 \rightarrow f(x) = x \ln x - x + 1$

TEST 11

1. Să se calculeze : $I = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$.

- $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 (1 + \frac{2x}{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = x \Big|_0^1 + \ln|x^2 + 1| \Big|_0^1 = 1 + \ln 2$
- $I = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \ln(2e)$.

2. Să se calculeze: $I = \int_{-1}^1 e^x (x^2 + 1) dx$.

- Fie formula **integrării prin părți**: $\int_a^b f(x)g(x)'dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.
- $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$.
- $\int_{-1}^1 e^x (x + 2) dx = [(x^2 + 1)e^x] \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 x e^x dx = 2e - \frac{2}{e} - 2 \int_{-1}^1 x e^x dx$.
- $\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$
- $\int_{-1}^1 x e^x dx = (x e^x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$.
- $\int_{-1}^1 e^x (x + 2) dx = 2e - \frac{6}{e} = \frac{2e^2 - 6}{e}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha + 2)x, & x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x}, & x > 1 \end{cases}$. Să se **determine** constanta α astfel

încât funcția să aibă limită în punctul $x_0 = 1$.

- f are limită în punctul $x = 1$ dacă $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 2\alpha + 2$, $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = 1$.
- $2\alpha + 2 = 1 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$.

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x - 1}$. Să se **determine** punctele

$M(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcției f în care tangenta este paralelă cu dreapta $y = 2x - 1$.

- Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$ este: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Panta tangentei este: $m_t = f'(x_0)$ iar panta dreptei este: $m_d = 2$.
- Dreptele sunt paralele dacă: $m_d = m_t$.
- $f'(x) = \frac{6x(x-1) - 3x^2 + 2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x_0) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 2}{(x_0 - 1)^2} \rightarrow \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 2}{(x_0 - 1)^2} = 2$.
- $x_0^2 - 2x_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow M(0, 2) \\ x_0 = 2 \rightarrow f(2) = \frac{46}{3} \rightarrow M(2, \frac{46}{3}) \end{cases}$.

5. Să se **calculeze** limita: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$.

- Avem cazul de nedeterminare: $\frac{0}{0}$.
- Vom folosi: $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3\sin x}{1} = 0$.

6. Fie sistemul :
$$\begin{cases} x + ay - 3z = 0 \\ x + ay + az = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$
 . Să se **determine** parametrul a ,astfel încât sistemul să **admită** soluții **diferite de soluția nulă**

- Sistemul **are soluții** diferite de soluția nulă $\leftrightarrow \det A = 0$.

- $$\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ 1 & a & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$
 .

- $a \in \{-3, 2\}$.

7. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix}$. Să se afle **valorile naturale** ale parametrului β pentru care : $\text{rang}(I_3 + A + A^t) = 2$.

- Fie $B = I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 5 \end{pmatrix}$.

- $\text{rang} B = 2 \leftrightarrow \det B = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(\beta - 1)^2 = 0 \rightarrow \beta - 1 = 0 \rightarrow \beta = 1$.

8. Să se **rezolve** ecuația :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ x+1 & x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$
 .

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ x+1 & x & x-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x - 6 = 0 \rightarrow x = -2$$
 .

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci A^3 este de forma:

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = I_3$

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci A^{-1} are forma:

- Deoarece primele două linii ale matricei A sunt proporționale $\rightarrow \det A = 0$
- Deoarece $\det A = 0$ nu putem calcula inversa matricei A

11. Să se calculeze: $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^x + 1} dx$.

- Fie substituția: $x = -t \rightarrow dx = -dt \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$.
- $I = -\int_1^{-1} \frac{\cos(-t)}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{\cos(t)}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{e^t \cos(t)}{e^t + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{(e^t + 1 - 1)\cos(t)}{e^t + 1} dt =$
- $I = \int_{-1}^1 \frac{(e^t + 1)}{e^t + 1} \cos t dt - I \rightarrow 2I = \int_{-1}^1 \cos t dt \rightarrow 2I = \sin 1 - \sin(-1).$
 $2I = 2\sin 1 \rightarrow I = \sin 1.$

12. Să se calculeze: $I = \int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx$.

Fie notația: $\begin{cases} x-1 = t \rightarrow x = t+1 \rightarrow dx = dt \\ x = 2 \rightarrow t = 1, x = 3 \rightarrow t = 2 \end{cases}$.

$$I = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{t^{100}} dt = \int_1^2 \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{100}} dt = \int_1^2 t^{-97} dt + 3 \int_1^2 t^{-98} dt + 3 \int_1^2 t^{-99} dt + \int_1^2 t^{-100} dt.$$

$$\int_1^2 t^{-97} dt = -\frac{t^{-96}}{96} = \frac{1}{96}(1-2^{-96}), \int_1^2 t^{-98} dt = -\frac{t^{-97}}{97} = \frac{1}{97}(1-2^{-97}),$$

$$\int_1^2 t^{-99} dt = -\frac{t^{-98}}{98} = \frac{1}{98}(1-2^{-98}), \int_1^2 t^{-100} dt = -\frac{t^{-99}}{99} = \frac{1}{99}(1-2^{-99}).$$

$$I = \frac{1}{96}(1-2^{-96}) + \frac{1}{97}(1-2^{-97}) + \frac{1}{98}(1-2^{-98}) + \frac{1}{99}(1-2^{-99}).$$

13. Fie $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + \alpha} - \beta}{x^2 + x - 2}$. Să se **determine suma** parametrilor reali α, β **astfel încât**
 $: l = \frac{5}{18}$

- Pentru ca limita să fie finită, trebuie să avem **cazul de nedeterminare**: $\frac{0}{0}$
- $\sqrt{1+3+\alpha} - \beta = 0 \rightarrow \sqrt{\alpha+4} = \beta$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + \alpha} - \beta}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + \alpha}} \cdot (2x + 3)}{2x + 1} = \frac{\frac{5}{2\sqrt{4+\alpha}}}{3} = \frac{5}{6\sqrt{\alpha+4}}$$

- **Vom avea:** $\frac{5}{6\sqrt{\alpha+4}} = \frac{5}{18} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha+4}} = \frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{\alpha+4} = 3 \rightarrow \alpha = 5 \rightarrow \beta = 3$

$$S = \alpha + \beta = 8$$

14. Să se **calculeze** : $I = \int_1^{2e} |\ln x - 1| dx$.

Fie: $|\ln x - 1| = \begin{cases} \ln x - 1, \ln x \geq 1 \rightarrow \ln x \geq \ln e \rightarrow x \geq e \\ -\ln x + 1, \ln x < 1 \rightarrow \ln x < \ln e \rightarrow x \in (0, e) \end{cases}$

$$I = \int_1^{2e} |\ln x - 1| dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx + \int_e^{2e} (\ln x - 1) dx = 2(e - 1 + e \ln 2)$$

Fie: $\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int_1^e \ln x dx = 1, \int_e^{2e} \ln x dx = 2e \ln 2 + e \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$

15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot |x - \alpha|$. Să se **determine valoarea** parametrului α pentru care funcția **este derivabilă** pe mulțimea numerelor reale.

1. Fie: $|x - \alpha| = \begin{cases} x - \alpha, & x \geq \alpha \\ -x + \alpha, & x < \alpha \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x - \alpha), & x \geq \alpha \\ x(\alpha - x), & x < \alpha \end{cases}$

2. Funcția f trebuie să fie continuă pe mulțimea numerelor reale. Din forma funcției, problema continuității se pune numai în punctul: $x = \alpha$.

- f este **continuă** în **punctul** : $x = \alpha$ dacă: $\lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha, x > \alpha} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \alpha, x > \alpha} f(x) = 0, f(\alpha) = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x - \alpha, & x > \alpha \\ -2x + \alpha, & x < \alpha \end{cases}$
- f este **derivabilă** în **punctul** : $x = \alpha$ dacă: $\lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha, x > \alpha} f'(x)$
- $\alpha = 0$

TEST 12

1. Fie funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 2)$. Să se **calculeze aria** suprafeței plane **determinate** de **graficul** funcției f , **axa** OX și **dreptele** $x = 0$ și $x = 1$

- $A = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 e^x(x^2 + 2) dx = e^x(x^2 + 2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = 3e - 2 - 2 = 3e - 4$.
- $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}, \begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$.
- $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$.

2. Să se **calculeze**: $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}$

- $\begin{cases} f(x) = e^{\arcsin x} \rightarrow f'(x) = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 1-x^2 = t \rightarrow -2x dx = dt \\ -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{t} + C \end{cases}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x} dx$
- $\int e^{\arcsin x} dx = x e^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}$
- $\begin{cases} f(x) = e^{\arcsin x} \rightarrow f'(x) = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$

- $I = \frac{e^{\arcsin x} (x - \sqrt{1-x^2})}{2} + C$

3. Se **consideră** funcția: $f(x) = \frac{x^2-4x-6}{2x^2+x-3}$. Să se **calculeze** $f'(1)$.

- $f'(x) = \frac{(2x-4)(2x^2+2x-3) - (x^2-4x-6)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}$
- $f'(1) = \frac{43}{0} = +\infty \rightarrow f$ **nu este derivabilă** în punctul $x=1$

4. Să se **calculeze**: $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2015}{x}}}{x}$.

- **Limita comută** cu funcțiile din **tabelul de derivare**: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2015}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{2015}{x}}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2015}{x^3}} = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2015}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & x \in (0, 1) \\ \arctg x, & x \geq 1 \end{cases}$. Să se **determine** constantele α, β astfel

încât **funcția să aibă limită** pe $\mathbb{R}$.

- Problema existenței limitei **se pune în punctele**: $x=0, x=1$.
- f **este continuă** în $x=0$ dacă: $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = f(0)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \alpha x + \beta = \beta$, $f(0) = \beta$.
- $\beta = 0$.

- f este **continuă** în $x=1$ **dacă**: $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \alpha x = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \arctg x = \frac{\pi}{4}$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea A^{2001} .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $A^{2001} = A^{2000} A = (A^2)^{1000} A = (I_2)^{1000} A = I_2 A = A$
- $A^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

7. Să se **rezolve** sistemul:
$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3X + 9Y = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 18 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -16 & 22 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ 3X = \begin{pmatrix} \frac{22}{10} & \frac{33}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{18}{10} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{11}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow$$

8. Sistemul de ecuații : $\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ are **numai soluția nulă** dacă:

- Sistemul de ecuații are **numai soluția nulă** $(0, 0, 0) \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

- $\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha + 2 \neq 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 \neq 0$.

- $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

9. Să se **calculeze** determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Metoda 1

- **Vom înmulți cu (-1) coloana 1 și o vom aduna la celelalte coloane**

- $\begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+t & y-x & z-x \\ x & y-x & z-x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

- $\Delta = \begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} x+t & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Metoda 2: Prin calcul direct

10. Să se **rezolve** în mulțimea **numerelor reale** ecuația : $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 5$

- $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 5 \rightarrow x^3 + x + 5 = 5 \leftrightarrow x^3 + x = 0 \leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0.$

- **Singura soluție** este: $x = 0.$

11. Să se **calculeze** : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx$

Introducem **notațiile** : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx.$

- $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$

- Fie **notația** : $x = \frac{\pi}{2} - u \rightarrow dx = -du.$

- **Dacă** $x = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0.$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\sin(\frac{\pi}{2} - u))^{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}}{(\sin(\frac{\pi}{2} - u))^{\cos(\frac{\pi}{2} - u)} + (\cos(\frac{\pi}{2} - u))^{\sin(\frac{\pi}{2} - u)}} du =$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^{\sin u}}{(\cos u)^{\sin u} + (\sin u)^{\cos u}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = J$$

Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}. \\ I = J \end{cases}$

12. Să se calculeze: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin 2x}{\sin^2 x} dx$.

Fie: $\frac{1 - \sin 2x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = -(\operatorname{ctgx})' - (\ln|\sin^2 x|)'$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{ctgx})' dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\ln(\sin^2 x))' dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \ln 3.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{ctgx})' dx = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ..}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\ln(\sin^2 x))' dx = \ln(\sin^2 \frac{\pi}{3}) - \ln(\sin^2 \frac{\pi}{6}) = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{4} = \ln 3.$$

13. Să se calculeze : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$.

Fie notația : $\begin{cases} \sin x + \cos x = t \rightarrow (\cos x - \sin x)dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$.

$$I = \int_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -(\frac{2}{\sqrt{3}+1} - 1) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}.$$

14. Să se arate că: $2\arctg x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0, x \in (-1,1)$.

Notăm : $\begin{cases} f(x) = 2\arctg x, g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \\ f(x) = g(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}, g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot (\frac{2x}{1+x^2})' = \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Am arătat că : $f'(x) = g'(x) \rightarrow f(x) = g(x) + C$.

Pentru $x = 0 \rightarrow \arctg 0 = \arcsin 0 + C \rightarrow C = 0$.

15. Să se rezolve ecuația integrală: $\int_0^x t \cdot e^t dt = 1$.

Fie: $\begin{cases} f(t) = t \rightarrow f'(t) = 1 \\ g'(t) = e^t \rightarrow g(t) = e^t \end{cases} \rightarrow \int_0^x t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - e^t = x \cdot e^x - e^x + 1$.

$$\int_0^x t \cdot e^t dt = 1 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

TEST 13

1. Să se calculeze : $I = \int x^3 \ln x dx$, unde $x \in (0, +\infty)$

- **Aplicăm** formula integrării prin părți: $\int_a^b f(x)g(x)'dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- $$\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^3 \rightarrow g(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$
- $$I = \int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

2. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$

- **Folosim** formulele: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}, \sqrt{x^2} = |x|$
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})} + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}} \end{aligned}$$
- $$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{|x| + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

3. Să se **determine** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \beta x, & x > 1 \end{cases}$

să fie **continuă** pe $\mathbb{R}$

- f este **continuă** pe intervalele $(-\infty, 1), (1, +\infty)$, deoarece este **funcție polinomială**.
- Problema se pune în punctul : $x = 1$.
- f este **continuă** în punctul : $x = 1$ **dacă**: $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 1 + \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \beta$, $f(1) = 2$.
- f este **continuă** dacă: $1 + \alpha = \beta = 2 \rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$.

4. Să se **calculeze** : $I = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$, $x \in (1, 2)$.

- $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \rightarrow \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$.
- $x(A + B) - 2A - B = 1 \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 1$.
- $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = -\int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x - 2} dx = \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + C$.

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$. Să se **determine** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ știind că $x = 1$ este **punct de extrem**, iar $x = -2$, este **punct de inflexiune** pentru funcția f .

- Un punct x_0 este **punct de extrem** pentru funcția f dacă : $f'(x_0) = 0$.
- Un punct x_0 este **punct de inflexiune** pentru funcția f dacă : $f''(x_0) = 0$.
- $f'(x) = (2x + \alpha)e^x + (x^2 + \alpha x + \beta)e^x = e^x(x^2 + 2x + \alpha x + \alpha + \beta)$,
 $f'(1) = 3 + 2\alpha + \beta$
- $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + \alpha x + \beta + 2\alpha + 2)$, $f''(-2) = \beta - 2$.

- $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \beta = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}, \beta = 2 .$

6. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \geq 2$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}$

- Se demonstrează prin **inducție matematică** că: $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$

7. Se consideră sistemul: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + lz = 2 \end{cases}$.

Să se găsească valorile parametrului l astfel încât **sistemul sa fie incompatibil**.

- Considerăm : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & l \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

- Sistemul **este incompatibil** dacă : $\det A = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

- $\det A = 0 \rightarrow 3l - 2 = 0 \rightarrow l = \frac{2}{3}$

8. Să se **determine** $\alpha \in R$ astfel încât $A^* = A^{-1}$,cu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha + 3 & 1 \\ -3 & \alpha - 4 & -3 \end{pmatrix}$,

unde A^* reprezintă **matricea adjunctă**

- **Folosim** formula: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, unde A^* reprezintă **matricea adjunctă** .

- $A^* = A^{-1} \leftrightarrow \det A = 1 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha + 3 & 1 \\ -3 & \alpha - 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \leftrightarrow -2\alpha - 13 = 1$
- $\alpha = -7$

9. Să se afle **soluțiile întregi** ale ecuației : $\begin{vmatrix} x & u & v \\ u & x & u \\ v & u & x \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} x & u & v \\ u & x & u \\ v & u & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^3 - x(2u^2 + v^2) + 2u^2v = 0$.

- **Căutăm** soluții printre **divizorii** termenului liber $\rightarrow x = v$.

10. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Să se găsească **soluțiile pozitive** ale ecuației:
 $\det(A + 2xI_2) = 4$.

- $B = A + 2xI_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x & 4 \\ 3 & -1+2x \end{pmatrix}$
- $\det B = 4 \leftrightarrow (2x-1)^2 - 12 = 4 \rightarrow 2x-1 = \pm 4 \rightarrow x \in \{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
- **Dar** $x > 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

11. Să se **calculeze** : $I = \int_{-1}^2 \max(1, x) dx$

Definim : $\max(f, g) = \begin{cases} f, & f > g \\ g, & g > f \end{cases} \rightarrow \max(1, x) = \begin{cases} 1, & 1 > x \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^2 \max(1, x) dx = \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^2 x dx = \frac{7}{2}$$

12. Să se calculeze : $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$

Facem notația:
$$\begin{cases} \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ x = \frac{1}{e} \rightarrow t = -1, x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^{\frac{1}{3}} dx = \int_{-1}^0 t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

13. Să se calculeze : $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1}{t^2 - 2t + 5} dt$

Fie : $t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4 \rightarrow \begin{cases} t-1 = u \rightarrow t = u+1 \rightarrow dt = du \\ t = 0 \rightarrow u = -1, t = x \rightarrow u = x-1 \end{cases}$

Notăm : $I = \int_0^x \frac{1}{t^2 - 2t + 5} dt = \int_{-1}^{x-1} \frac{1}{u^2 + 4} du = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} - \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}))$

Folosim : $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}x, \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} - \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2})) = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}) .$$

14. Să se calculeze : $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

Fie notația :
$$\begin{cases} \cos x = t \rightarrow -\sin x dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1, x = \pi \rightarrow t = -1 \\ \sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \end{cases}$$

$$I = -\int_1^{-1} \frac{(1-t^2)}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 + 4\operatorname{arctg}1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t = \arctg 1 - \arctg(-1) = 2\arctg 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \int_{-1}^1 dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1} dt = 2 - 2\arctg 1$$

15. Fie $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 2^{\sin x}$. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{F(x) - F(\frac{1}{3})}{x - \frac{1}{3}}$, **unde** $F : R \rightarrow R$

este **primitiva** funcției f

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{F(x) - F(\frac{1}{3})}{x - \frac{1}{3}} = F'(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}) = 2^{\sin \frac{1}{3}}$$

TEST 14

1. Să se calculeze : $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^3}$

- Avem **nedeterminarea** : $\frac{0}{0}$, deoarece: $\int_0^0 e^{t^2} dt = 0$

- **Am folosit:** $(\int_0^x f(t) dt)' = f(x)x' - f(0)0' = f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{3x^2} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = -\frac{1}{3}$

2. Să se calculeze : $I = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

- **Notăm:** $e^x = t \rightarrow e^x dx = dt$.

- $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1| + C = \ln(e^x + 1) + C$.

3. Să se găsească **punctul de maxim** al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$

- **Punctele de maxim** verifică ecuația: $f'(x) = 0$.

- $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$ Avem **trei puncte critice**: $-1, 0, 1$.

- Pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$ funcția este **descrescătoare**.

- Pentru $x \in (-1, 0] \cup [1, +\infty)$ funcția este **crescătoare**.

- $A(0, 0)$ este **punct de maxim**.

4. Să se **determine** numărul **punctelor de inflexiune** pentru funcția: $f(x) = x^4 - 4x$.

- **Punctele de inflexiune** verifică ecuația: $f''(x) = 0$.
- $f'(x) = 4x^3 - 4 \rightarrow f''(x) = 12x^2$.
- **Se observă** că: $f''(x) \geq 0, \forall x \in R \rightarrow f$ **este convexă** pe R .
- **Nu avem** puncte de inflexiune.

5. Să se **calculeze**: $I = \int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx$.

- $$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 4 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$
- $$\int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx = e^x(x^2 + 4x + 3) \Big|_2^3 - \int_2^3 (2x + 4)e^x dx$$
- $$\begin{cases} f(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 2 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$
- $$\int_2^3 (2x + 4)e^x dx = (2x + 4)e^x \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 e^x dx = 10e^3 - 8e^2 - 2(e^3 - e^2) = 8e^3 - 6e^2$$
- $$\int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx = 24e^3 - 15e^2 - 8e^3 + 6e^2 = 16e^3 - 9e^2$$

6. Fie sistemul: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$. Să se **găsească** acele soluții (x_0, y_0, z_0) ale sistemului **care verifică** relația: $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Avem un sistem omogen **care admite** și soluții $\neq 0$
- **Alegem** minorul: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow x, y$ sunt **principale** iar z este **secundară**

- Sistemul **devine**: $\begin{cases} x-y=-z \\ x-2y=-3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=-z \\ y=2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases}$
- $x_0 + y_0 + z_0 = 4 \leftrightarrow 4z_0 = 4 \rightarrow z_0 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow y_0 = 2$
- $S = \{(1,2,1)\}$

7. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și polinomul $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Să se **calculeze**: $f(A)$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}, 6A = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$
- $f(A) = A^2 - 6A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $f(A) = O_3.$

8. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze**: A^{2009}

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$
- $A^{2009} = A^{2008} A = (A^2)^{1004} A = (O_2)^{1004} A = O_2 A = O_2$

9. Să se **rezolve** ecuația: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

METODA 1:

- **Înmulțim cu (-1) prima coloană și o adunăm la celelalte două coloane.**
- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x)$
- $x(1-x) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 1 \rightarrow x \in \{0,1\}$

Metoda 2: Prin calcul direct

10. Să se **determine** matricele A, B știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \bullet & \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}. \end{aligned}$$

11. Să se **calculeze** : $I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx.$

Se observă că : $5+4x-x^2 = -(x^2-4x-5) = 9-(x-2)^2.$

Fie: $\begin{cases} x-2=t \rightarrow x=t+2 \rightarrow dx=dt \\ x=2 \rightarrow t=0, x=3 \rightarrow t=1 \end{cases}.$

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9-t^2}} dt = \arctg \frac{t}{3} = \arctg \frac{1}{3} - \arctg 0 = \arctg \frac{1}{3}.$$

12. Să se determine **punctele de inflexiune** pentru funcția : $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

Pentru a determina **punctele de inflexiune**, vom **rezolva** ecuația: $F''(x) = 0$

$$F'(x) = e^{-x^2} \rightarrow F''(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \rightarrow F''(x) = 0 \rightarrow x = 0.$$

Singurul **punct de inflexiune** este : $x = 0$

13. Să se calculeze : $I = \int_0^1 \frac{4^x}{2^x + 1} dx$

Fie notația: $\begin{cases} 2^x = t \rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \frac{4^x}{2^x + 1} dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{t}{t+1} dt = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 dt - \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$$

$$I = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{\ln 2} (1 - \ln \frac{3}{2})$$

14. Dacă : $\int \frac{x\sqrt{1-x^2} + 4}{1-x^2} dx = a\sqrt{1-x^2} + b \ln \frac{c(x-1)}{x+1}$, să se calculeze:

$S = a + b + c$ știind că $x \in (-1, 1)$.

$$(1) \int \frac{x\sqrt{1-x^2} + 4}{1-x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx - 4 \int \frac{1}{x^2-1} dx = -\sqrt{1-x^2} - \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}, \int \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}.$$

Din relația (1) obținem: $\begin{cases} a = -1, b = -1, c = 1 \\ S = -1 \end{cases}.$

15. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$

Avem nedeterminarea: 1^∞ .

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} - 1 \right)^{\frac{3}{2^x + 3^x + 5^x - 3}} \right]^{\frac{2^x + 3^x + 5^x - 3}{3x}}$$

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x + 5^x - 3}{3x}} = e^{\frac{\ln 30}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x + 5^x - 3}{3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5}{3} = \frac{\ln 30}{3}.$$

TEST 15

1. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -2 & -1 & x-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -2 & -1 & x-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

2. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Să se **determine** parametrii reali α, β astfel încât **rangul** matricei să fie egal cu 2.

- $\text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0$

- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\alpha + 2\beta - 3 = 0 \rightarrow \alpha = 2\beta - 3$

- Pentru $\alpha = 1 \rightarrow \beta = 2$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Atunci **suma** : $\det(A+B) + \det(A-B)$ este egală cu:

- $A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; A-B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$
- $\det(A+B) = (a+e)(d+h) - (c+g)(b+f) = ad + ah + ed + eh - cb - cf - gb - gf$
 $\det(A-B) = (a-e)(d-h) - (c-g)(b-f) = ad - ah - ed + eh - cb + cf + gb - gf$
- $\det(A+B) + \det(A-B) = 2ad - 2bc + 2eh - 2gf = 2(\det A + \det B)$

4. Să se rezolve sistemul :
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z - 5y = -1 \\ 8z - y + 4x = 4 \end{cases}$$

- Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ vom aplica regula lui CRAMER

- Considerăm:** $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

- $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = -1, y = \frac{\Delta_y}{\det A} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\det A} = 1$

5. Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine **valoarea** parametrului β astfel încât să fie adevărată egalitatea: $A^3 = 3A^2 + \beta A + I_3$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 = 3 + \beta + 1 \\ 6 = 9 + \beta \\ 3 + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \beta = -3$

6. Determinați constantele α, β astfel încât: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - \alpha x \right) = \beta + 3$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \alpha) + x(1 - 2\alpha) + 1}{x + 2} = \beta + 3$

- Pentru ca limita să fie finită trebuie ca: $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{x+2} = \beta + 3 \rightarrow \beta + 3 = -1 \rightarrow \beta = -4$

7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$. Să se calculeze : $I = \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$

- $f(x^2) = x^2 e^{x^2} \rightarrow \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} (e^4 - e)$

- $\begin{cases} x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \rightarrow \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} (e^4 - e) \\ x = 1 \rightarrow u = 1, x = 2 \rightarrow u = 4 \end{cases}$

8. Să se găsească **numărul punctelor de extrem** al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- **Punctele de extrem** se află printre rădăcinile ecuației: $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$ este punct critic
- Pentru $x \in (-\infty, 0]$ funcția f **este crescătoare**.
- Pentru $x \in [0, +\infty)$ funcția f **este descrescătoare**.
- Punctul $x = 0$ este **punct de minim**, deci este **punct de extrem**
- Avem **un singur punct de extrem**.

9. Să se calculeze limita: $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$

- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{\infty}{\infty}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{4x-2} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = 1$

10. Să se calculeze : $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$ (Integrala cu aplicații în **dinamica populațiilor**)

- **Vom folosi** formula: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C$.

- $\begin{cases} x^4 = u \rightarrow 4x^3 dx = du \\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4} \arcsin u + C \end{cases}$.

- $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$

11. Să se calculeze : $I = \int_{-1}^2 \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$

Considerăm: $4x^2 + 4x + 5 = 4(x^2 + x + \frac{5}{4}) = 4[(x + \frac{1}{2})^2 + 1]$

Fie: $\begin{cases} x + \frac{1}{2} = t \rightarrow x = t - \frac{1}{2} \rightarrow dx = dt \\ x = -1 \rightarrow t = -\frac{1}{2}, x = 2 \rightarrow t = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^2 \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx = \frac{1}{4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{4} \arctg t = \frac{1}{4} (\arctg \frac{5}{2} + \arctg \frac{1}{2}) .$$

Am folosit formulele: $\begin{cases} \arctg(-x) = -\arctg x \\ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$

12. Fie două funcții f, g care **verifică** relația: $g(x) = (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \cdot f(x) + x^2 - 1$.

Să se calculeze: $g'(1)$

$$g'(x) = (3x^2 - 8x + 5) \cdot f(x) + (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \cdot f'(x) + 2x \rightarrow g'(1) = 2$$

13. Să se calculeze : $I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{(x+1)(x^2 + 2)} dx$

Se observă că : $\frac{x^4 + 1}{(x+1)(x^2 + 2)} = (x-1) + \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 2)}$

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{(x+1)(x^2 + 2)} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 2)} dx = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fie: $\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2} \rightarrow \begin{cases} A(x^2 + 2) + (Bx+C)(x+1) = x^2 + 2x + 3 \\ A+B=1 \\ B+C=2 \rightarrow A=-\frac{2}{3}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{5}{3} \\ 2A+C=3 \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 2)} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2} dx + \frac{5}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 2)} dx = -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 2) + \frac{5\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14. Să se calculeze : $I = \int_0^2 x\sqrt{1+x} dx$

Fie notația: $\begin{cases} \sqrt{1+x} = t \rightarrow 1+x = t^2 \rightarrow x = t^2 - 1 \rightarrow dx = 2t dt \\ x=0 \rightarrow t=1, x=2 \rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}$

$$I = 2 \int_0^2 t^2 \cdot (t^2 - 1) dt = 2 \left(\int_0^2 t^4 dt - \int_0^2 t^2 dt \right) = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{112}{15}$$

15. Dacă $F : R \rightarrow R$, este o **primitivă** a funcției : $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 1$,

să se **calculeze** : $F(1) - F(0)$.

Dacă F , este o **primitivă** a funcției f , **atunci:** $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx + \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int dx = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} + x.$$

$$F(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1 + C = \frac{23}{15} + C, F(0) = C \rightarrow F(1) - F(0) = \frac{23}{15}.$$

TEST 16

1. Numărul punctelor **de inflexiune** pentru: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1$ este:

- **Punctele de inflexiune** verifică ecuația: $f''(x) = 0$
- $f'(x) = 12x^2 - 12x - 24$, $f''(x) = 24x - 12$
- $f''(x) = 0 \rightarrow 24x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
- Pentru $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ funcția este **concavă**, pentru $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ funcția este **convexă**
- Vom avea **un singur punct de inflexiune**: $x = \frac{1}{2}$

2. Fie $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$. Să se calculeze **asimptota orizontală** spre $+\infty$

- $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$
- Vom spune că $y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$

3. Să se **calculeze**: $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx$, unde $x \in \mathbb{R}$

- **Notăm** $e^x = u \rightarrow x = \ln u \rightarrow dx = \frac{1}{u} du$
- $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \ln|u| - \ln|u+1| + C$
- $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C = x - \ln(e^x + 1) + C$

4. Se **consideră** funcția: $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$. Să se **calculeze** $f'\left(\frac{7}{3}\right)$.

- **Vom folosi** formula: $(fg)' = f'g + fg'$
- $f'(x) = 2(x - 1)(x - 3) + (x - 1)^2 = (x - 1)(3x - 7)$
- $f'\left(\frac{7}{3}\right) = 0$

5. Să se **calculeze** $I = \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx$

- **Vom aplica** formula: $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \frac{1}{u'}$
- $I = \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx = \int_0^1 2^x dx + \int_0^1 2^{-x} dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 - \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2}$
- $I = \frac{3}{2 \ln 2}$

6. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.
- $x \in \{1, 2\}$.

7. Să se **rezolve** sistemul : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

- Considerăm : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Toți **minorii** de ordin doi sunt **egali cu zero**.
- Alegem $\Delta = 1$ ca **minor principal**
- Sistemul **este compatibil** $\leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0(F)$
- Sistemul **este incompatibil**

8. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea $A^n, n \geq 2$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Se demonstrează prin **inducție matematică** că: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ și funcția: $f(A) = A^2 - 2A + I_3$.

Să se **calculeze** $f(A)$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

- $f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

10. Să se **rezolve** ecuația : $\left| \begin{matrix} x(x+2) & x+3 \\ 5 & 4 \end{matrix} \right| = -14$

- $\left| \begin{matrix} x^2 + 2x & x+3 \\ 5 & 4 \end{matrix} \right| = -14 \rightarrow 4(x^2 + 2x) - 5(x+3) + 14 = 0 \rightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$

- $x \in \{-1, \frac{1}{4}\}$

11. Fie $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se **determine parametrul** $\alpha \in (1,3)$ astfel încât :

$$\int_1^3 f(x)dx = 2f(\alpha) .$$

- $\int_1^3 f(x)dx = 2f(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha^2 = \frac{26}{3} \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{13}{3}} .$
- **Dar** $\alpha \in (1,3) \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{13}{3}} .$

12. Să se **calculeze** : $I = \int \frac{4x}{x^4 + 1} dx$

- $\int \frac{4x}{x^4 + 1} dx = 2 \int \frac{2x}{(x^2)^2 + 1} dx = 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \arctgt + C = 2 \arctg(x^2) + C$
- **Notăm** : $x^2 = t \rightarrow 2x dx = dt$

13. Să se **calculeze**: $I = \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 2^x + 3^x + 6^x) dx$

Se **observă** că : $1 + 2^x + 3^x + 6^x = (1 + 2^x)(1 + 3^x)$

$$I = \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 2^x)(1 + 3^x) dx = \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 2^x) dx + \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 3^x) dx = I_1 + I_2$$

Fie : $I_1 = \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 2^x) dx$. Vom **face notația**: $\begin{cases} x = -t \rightarrow dx = -dt \\ x = -1 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$

$$I_1 = \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + \frac{1}{2^t}) dx = - \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + \frac{1}{2^t}) dx = - \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + 2^t) dt + \ln 2 \int_{-1}^1 t^4 dt$$

$$I_1 = -I_1 + \frac{2 \ln 2}{5} \rightarrow I_1 = \frac{\ln 2}{5}$$

Fie : $I_2 = \int_{-1}^1 x^3 \ln(1 + 3^x) dx$. Vom **face notația**: $\begin{cases} x = -t \rightarrow dx = -dt \\ x = -1 \rightarrow t = 1, x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$

$$I_1 = \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + \frac{1}{3^t}) dx = - \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + \frac{1}{3^t}) dx = - \int_{-1}^1 t^3 \ln(1 + 3^t) dt + \ln 3 \int_{-1}^1 t^4 dt$$

$$I_1 = -I_1 + \frac{2 \ln 3}{5} \rightarrow I_1 = \frac{\ln 3}{5}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\ln 2}{5} + \frac{\ln 3}{5} = \frac{\ln 2 + \ln 3}{5} = \frac{\ln 6}{5}$$

14. Să se calculeze : $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$

Fie **notația:** $\begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0, x = 1 \rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$I = 2 \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t+1} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = -1, \text{deoarece:}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = 1 - \ln 2$$

15. Dacă $F : R \rightarrow R$, este o **primitivă** a funcției : $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+16}},$

să se **calculeze** : $D = F(4) - F(0)$

F este o **primitivă** a funcției f dacă : $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$

$$F(x) = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \sqrt{x^2+16} - \ln(x + \sqrt{x^2+16}) + C_3$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}} dx = \sqrt{x^2+16} + C_1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+16}) + C_2$$

$$D = F(4) - F(0) = \sqrt{32} - \ln(4 + \sqrt{32}) - 4 + \ln 4 = 4(\sqrt{2} - 1) + \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

TEST 17

1. Să se **calculeze** : $I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$ (**Integrală cu aplicații în dinamica populației**)

- $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}) dx = \int dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$
- $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \rightarrow a(x-3) + b(x-2) = 1 \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -3a-2b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$
 $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int (-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$
- $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta \arctg x$. Să se **determine** parametrii α, β știind că $f'(1) = 2$, $f''(-1) = 1$

- $f'(x) = \alpha + \frac{\beta}{1+x^2} \rightarrow f'(1) = \alpha + \frac{\beta}{2} = 2 \rightarrow 2\alpha + \beta = 4$
- $f''(x) = \frac{-2x\beta}{(1+x^2)^2} \rightarrow f''(-1) = \frac{2\beta}{4} = 1 \rightarrow \beta = 2$
- $\alpha = 1, \beta = 2$

3. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$. Să se calculeze **aria suprafeței plane** determinate de graficul funcției f , axa OX și dreptele $x=1$ și $x=e$

- $A = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e (x^2 + x \ln x) dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^2 + 1}{4}$

- $$\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases} \rightarrow \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

- $$A = \int_1^e |f(x)| dx = \frac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}$$

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{x}$. Atunci $f'(1)$ este egal cu :

- $$f'(x) = (2x + 1)\sqrt[3]{x} + (x^2 + x + 1)\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$
- $$f'(1) = 4$$

5. Să se calculeze : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\ln(x+2) - \ln(x+1)}$

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\ln(x+2) - \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x+2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)}{x} = 1$$
- Avem cazul de **nedeterminare** : $\frac{0}{0}$
- $$\left(\ln \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{x}{x+1} \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{-1}{x(x+1)} \cdot \left(\ln \frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{-1}{(x+1)(x+2)}$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

6. Să se rezolve ecuația :
$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = (1-x)(1-2x)(1-3x) - x^2(1-2x) = (1-2x)(1-4x+2x^2) = 0$$

- $(1-2x)(1-4x+2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-2x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+1=0 \rightarrow x \notin R \end{cases}$
- **Singura soluție este:** $x = \frac{1}{2}$

8. Să se determine **soluțiile întregi** ale ecuației: $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Metoda 1

- **Adunăm** ultimile două linii la **prima linie**

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

- **Înmulțim** prima coloană cu (-1) și **o adunăm** la liniile doi și trei

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 \\ x & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(-1-x)^2 = 0 \rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$$

- $x \in Z \rightarrow x = -1$

Metoda 2 : Prin calcul direct

8. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$. Să se **găsească** o soluție a sistemului

(x_0, y_0, z_0) astfel încât: $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Avem un sistem omogen care admite și soluții } \neq 0$$

- **Alegem** minorul: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow x, y$ **sunt principale** iar z este **secundară**
- Sistemul **devine**: $\begin{cases} x - y = -z \\ x - 2y = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = -z \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$
- $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8 \leftrightarrow 8z_0 = 8 \rightarrow z_0 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow y_0 = 2$
- $S = \{(1, 2, 1)\}$

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** $A^n, n \geq 2$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos x & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cos x & 1 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin **inducție matematică** că: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\cos x & 1 \end{pmatrix}$

10. Să se **calculeze** $f(A)$, unde: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f(x) = x^2 - 5x + 7 \cdot I_2$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, (-5)A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 5A + 7I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

11. Se consideră funcția: $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}$. Să se **determine** **parametrii reali** $\alpha, \beta, \varepsilon$ astfel încât $F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \varepsilon x}{x - 1}$ să fie o **primitivă** a funcției f .

- F este o **primitivă** funcției f dacă: $F'(x) = f(x)$
- $F'(x) = \frac{(3\alpha x^2 + 2\beta x + \varepsilon)(x - 1) - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \varepsilon x)}{(x - 1)^2} = \frac{2\alpha x^3 + x^2(-3\alpha + \beta) - 2\beta x - \varepsilon}{x^2 - 2x + 1}$
- $F'(x) = f(x) \leftrightarrow \frac{2\alpha x^3 + x^2(-3\alpha + \beta) - 2\beta x - \varepsilon}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}$

$$\bullet \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta = 3 \\ -2\beta = -9 \\ -\varepsilon = -27 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{9}{2}, \varepsilon = 27$$

12. Să se calculeze : $I = \int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$

$$\bullet \quad x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4 \rightarrow x+2 = t \rightarrow dx = dt \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow t=2 \\ x=2 \rightarrow t=4 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx = \int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} dt = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}} dt = 2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$\bullet \quad \text{Notăm : } t^2 + 4 = u \rightarrow 2tdt = du \rightarrow \begin{cases} t=2 \rightarrow u=8 \\ t=4 \rightarrow u=20 \end{cases}$$

$$\int_2^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}} dt = \int_8^{20} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_8^{20} u^{-\frac{1}{2}} du = 2(\sqrt{20} - \sqrt{8}) = 4(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

13. Să se calculeze : $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Fie: $\begin{cases} x = 2 \cos t, t \in (0, \pi) \rightarrow dx = -2 \sin t dt \\ x = -2 \rightarrow t = \pi, x = 2 \rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$I = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = - \int_{\pi}^0 \sqrt{4-4\cos^2 t} \cdot 2 \sin t dt = 4 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 4 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$I = 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = 2t - \sin 2t = 2\pi, \text{ deoarece: } \sin \pi = \sin 0 = 0.$$

14. Să se rezolve : $I = \int_{-2}^2 \frac{1}{|x^2-1|+1} dx$

Considerăm: $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, x^2-1 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -x^2+1, x^2-1 < 0 \rightarrow x \in (-1, 1) \end{cases}$

$$I = \int_{-2}^2 \frac{1}{|x^2 - 1| + 1} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2 - x^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})^2}$$

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} x^{-2} dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2 - x^2} dx = -\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 2} dx = \int_1^1 \frac{1}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})^2}$$

15. Fie funcția : $f(x) = e^{-2x} \cos 3x$. Să se **determine parametrii reali α, β astfel încât** funcția $F(x) = e^{-2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$ **să fie o primitivă** a funcției f .

- **Deoarece F este o primitivă** a funcției f atunci : $F'(x) = f(x)$
- $F'(x) = -2e^{-2x}(\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{-2x}(-3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$
- $F'(x) = e^{-2x} \cos 3x(-2\alpha + 3\beta) + e^{-2x}(-2\beta - 3\alpha) = e^{-2x} \cos 3x$
- $$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 1 \\ -3\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha + 6\beta = 2 \\ -9\alpha - 6\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{13}, \beta = \frac{3}{13}$$

TEST 18

1. Fie funcția : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2$. Atunci f este convexă pe intervalul:

- Funcția f este convexă pe un interval I dacă: $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$
- $f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = 6x + 6 \rightarrow 6x + 6 \geq 0 \rightarrow x + 1 \geq 0$
- Funcția f este convexă pentru $x \in [-1, +\infty)$

2. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$. Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa OX și dreptele $x = 1$ și $x = e$

- $A = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$
- $\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$
- $A = \frac{e^2 + 1}{4}$

3. Să se calculeze: $I = \int \sin^3 x \cos x dx$

- Facem notația : $\sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt$
- $\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{\beta\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x - \beta}$. Să se determine constantele α, β astfel

încât $y = 2$ să fie asimptotă orizontală iar $x = 3$ să fie asimptotă oblică.

- **Asimptota orizontală :** $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x + 1}{x - \beta} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha = 2$
- **Asimptota oblică :** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x - \beta} = \infty \leftrightarrow 3 - \beta = 0 \rightarrow \beta = 3$

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$. Atunci $f'(0)$ este egal cu :

- $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \rightarrow f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1}(x^2 + 1)'$
- $f'(x) = \frac{2x}{5}(x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} \rightarrow f'(0) = 0$

6. Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

Metoda 1

- **Adunăm ultimele două linii la prima linie**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

- **Înmulțim cu (-1) prima coloană și o adunăm la doua și la a treia coloană**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ y & z-y & x \\ z & x-z & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & z-y & x-y \\ z & x-z & y-z \end{vmatrix} = -(y-z)^2 - (x-y)(x-z)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z)(-y^2 + 2yz - z^2 - x^2 + xz + xy + yz) = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3$$

Metoda 2 : Prin calcul direct

7. Se consideră sistemul :

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ (\alpha - 1)x + 2y + \alpha z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine **valoarea parametrului** α pentru care sistemul **admite** și soluții diferite de **soluția banală**.

- Sistemul admite și soluții diferite de soluția banală $\leftrightarrow \det A = 0$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha - 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 6(\alpha - 1) - 2\alpha - 8 = 4\alpha - 14 = 0$$

- $$\alpha = \frac{7}{2}$$

8. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea $A^n, n \geq 2$.

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se **demonstrează** prin inducție matematică că:
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Să se **rezolve** ecuația :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Considerăm** $X \in M_{3 \times 1}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- $$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-z=1 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -2$$

- $$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2}, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

10. Să se afle valorile **pare** ale parametrului α pentru care matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

nu este inversabilă

- **A nu este inversabilă** $\leftrightarrow \det A = 0$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha \in \{1, 2\}$$

- $\alpha = 2$

11. Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1}$. Să se **calculeze** : $I = \int_0^2 f(x) dx$

- **Explicităm funcția** : $[x] = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+1}, 0 \leq x < 1 \\ 0, 1 \leq x < 2 \end{cases},$
- $$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln 3$$

12. Fie $F(x) = \int_0^x e^t \ln(1-t+t^2) dt$. Determinați **punctele critice** ale funcției F .

• **Punctele critice** ale funcției F verifică : $F'(x) = 0$

$$F'(x) = e^x \ln(1-x+x^2) = 0 \rightarrow \ln(1-x+x^2) = 0 \rightarrow -x+x^2 = 0 \rightarrow x=0, x=1$$

13. Să se calculeze : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

1. Vom face **notația**:
$$\begin{cases} x = \sin t \rightarrow dx = \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

14. Fie $f(x) = e^{-x}(\alpha x^2 + 4x + \alpha)$ și F o **primitivă** a funcției f astfel încât :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1$. Să se **determine** parametrul real α care **verifică** relația (1).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = 1$$

Deoarece F este o **primitivă** a funcției f **atunci** : $F'(x) = f(x) \rightarrow F'(0) = f(0)$

$$f(0) = 1 \rightarrow \alpha = 1$$

15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și F o **primitivă** a sa. **Dacă** : $F(x) \cdot f(x) = x$, cu : $F(0) = 1$, atunci să se **determine** funcția f .

Deoarece F este o **primitivă** a funcției f **atunci** : $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) \cdot F'(x) = x$

$$\int F(x) \cdot F'(x) dx = \int x dx \rightarrow \frac{F^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \rightarrow F^2(x) = x^2 + C_2 \rightarrow F(x) = \sqrt{x^2 + C_2}$$

$$\mathbf{Din} : F(0) = 1 \rightarrow C_2 = 1 \rightarrow F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\mathbf{Dar} : F(x) \cdot f(x) = x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = x \rightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

TEST 19

1. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10x+12, \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = 3-x^2$
- $x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow x \in \{1,9\}$

2. Se dă matricea : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** $A^n, n \geq 2$.

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$
- $A^2 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$
- Se **demonstrează** prin inducție matematică că: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3. Să se **rezolve** sistemul : $\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

- **Vom trata** sistemul de ecuații matriciale ca un **sistem obișnuit de ecuații**

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \\
& \bullet \quad \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ -2Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Să se determine numărul real α astfel încât următorul sistemul să fie **compatibil**:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = \alpha \end{cases}$$

$$\bullet \quad \text{Considerăm : } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\bullet \quad \text{Deoarece } \Delta \neq 0, \text{ sistemul este } \mathbf{compatibil} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \quad -3\alpha + 5 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{5}{3}$$

5. Să se calculeze **rangul** matricei : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\bullet \quad \text{Deoarece } A \in M_{3 \times 4}(R) \rightarrow \text{rang} A \leq 3$$

- **Alegem** minorul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

- Deoarece $\Delta \neq 0 \rightarrow rang A = 3$

6. Să se **calculeze** : $I = \int arctg x dx$, unde $x \in R$

- $$\begin{cases} f(x) = arctg x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$$

- $$\int arctg x dx = x arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

- $$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \begin{cases} 1+x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \\ \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \end{cases}$$

7. Să se găsească **punctul de maxim** al funcției $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x - 3x^3$

- **Punctele de extrem** local se află printre **rădăcinile** ecuației: $f'(x) = 0$

- $f'(x) = 1 - 9x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 9x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$ sunt **puncte critice**

- Pentru $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ funcția f este **crescătoare**.

- Pentru $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ funcția f este **descrescătoare**.

- $x = \frac{1}{3}$ (maxim) $\rightarrow A(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$

8. Să se calculeze : $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ (Integrală cu aplicații în dinamica populațiilor)

- **Fie :**
$$\begin{cases} x^2+1=u \rightarrow 2xdx=du \\ x=0 \rightarrow u=1, x=1 \rightarrow u=2 \end{cases}$$

- $$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{2^3}-1)$$

- $$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

9. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$ care verifică egalitatea: $f''(x) - \alpha f'(x) + \alpha f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$
- $2e^x \cos x - \alpha e^x (\sin x + \cos x) + \alpha e^x \sin x = 0 \rightarrow e^x (2 \cos x - \alpha \cos x) = 0$
- $2 \cos x = \alpha \cos x \rightarrow \alpha = 2$

10. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(-3 + \frac{1}{x})$

- **Limita comută** cu funcțiile din tabelul de derivare: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(f(x)) = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(-3 + \frac{1}{x}) = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} (-3 + \frac{1}{x})) = \sin(-3) = -\sin 3$

11. Să se rezolve : $I = \int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dx$

- Fie notația : $x = -t \rightarrow dx = -dt \rightarrow \begin{cases} x = -9 \rightarrow t = 9 \\ x = 9 \rightarrow t = -9 \end{cases}$

- $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dx = \int_9^{-9} \frac{t^5}{t^8 + 1} dt = - \int_{-9}^9 \frac{t^5}{t^8 + 1} dt = - \int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dt \rightarrow \int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dx = 0$

12. Să se calculeze : $I = \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$

- Fie notația : $x+1 = t \rightarrow dx = dt$

- $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{t-1}{t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^2} dt = \ln|t| + \frac{1}{t} + C$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

13. Să se rezolve : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^4 x}} dx$

Reamintim formulele: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

Vom face notația:
$$\begin{cases} \sin^2 x = u \rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x dx = du \\ x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + (\sin^2 x)^2}} dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$$

14. Să se rezolve : $I = \int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx$

Fie: $3-2x-x^2 = -(x^2+2x-3) = -[(x+1)^2-4] = 4-(x+1)^2$

Considerăm: $\begin{cases} x+1=t \rightarrow x=t-1 \rightarrow dx=dt \\ x=-3 \rightarrow t=-2, x=1 \rightarrow t=2 \end{cases}$

$I = \int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt = 2\pi$ **(Vezi testul 17)**

15. Să se calculeze: $I = \int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} dx$

Fie : $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \rightarrow \begin{cases} A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = x^2 - 3x + 2 \\ A+B=1 \\ 2A+B+C=-3 \rightarrow B=-1 \rightarrow C=-6 \\ A=2 \end{cases}$

$I = A \ln|x| + B \ln|x+1| - \frac{C}{x+1} = 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} = \ln 2 + \ln 3 - 1 = \ln \frac{6}{e}$

TEST 20

1. Să se afle **numărul punctelor de extrem** local pentru funcția : $f(x) = x^5 \cdot \ln x$

- **Punctele de extrem local** se află printre **rădăcinile** ecuației: $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^5 \frac{1}{x} = x^4(5 \ln x + 1)$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 5 \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{1}{5} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ este punct critic
- Pentru $x \in (\frac{1}{\sqrt[5]{e}}, +\infty)$ funcția f este **crescătoare**.
- Pentru $x \in (0, \frac{1}{\sqrt[5]{e}})$ funcția f este **descrescătoare**.
- Avem **un singur punct de extrem local**(de minim): $x = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$

2. Să se **calculeze** limita: $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

- Avem cazul de **nedeterminare**: $\frac{0}{0}$
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - 1}$. Să se **determine** parametrul α știind că **graficul funcției f are asimptota:** $y = x - 1$.

- **Folosim formulele pentru asimptote oblice:**
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$
- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \alpha}{2x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + \alpha x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\alpha + 1)}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha + 1 = -1$
- $\alpha = -2$

4. Să se găsească o **primitivă** F a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, cu $F(0) = 0$.

- F este o **primitivă** a funcției f dacă: $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$
- $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x + C$
- $F(x) = \arctg x + C \rightarrow F(x) = \arctg x$
- $F(0) = 0 \rightarrow C = 0$ ($\arctg 0 = 0$)

5. Să se **calculeze** : $I = \int \frac{4x^3}{1+x^8} dx$, unde $x \in \mathbb{R}$.

- **Notăm** $x^4 = u \rightarrow 4x^3 dx = du$
- $\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctg u + C = \arctg x^4 + C$

6. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

Metoda 1.

- Vom înmulți prima linie cu (-1) și o vom aduna la liniile 2 și 3.

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x=1$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(x+1)+1+x+1=0 \rightarrow x^2+2x+2=0 \rightarrow x \notin R$$

- Singura soluție** este : $x=1$

Metoda 2

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^4 - x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$\bullet \quad (x-1)(x^3 + x^2 - 2) = 0 \rightarrow x-1=0 \vee x^3 + x^2 - 2 = 0 \rightarrow x=1$$

$$\bullet \quad x^3 + x^2 - 2 = 0 \rightarrow (x^3 - 1) + (x^2 - 1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

- Singura soluție** este : $x=1$.

7. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și matricea : $B = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** B^{-1} .

- **Folosim formulele:** $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^*, C^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$
- $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Fie $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det C = -1, C_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1, C_{12} = -2, C_{21} = -2, C_{22} = 3$
- $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

8. Să se **rezolve** ecuația matriceală: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- Fie notația $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ 2a-b=1 \rightarrow b=5 \\ c=0 \\ 2c-d=4 \rightarrow d=-4 \end{cases}$
- $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

9. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Să se afle **valorile** parametrilor α, β astfel încât:

$$A^2 + \alpha A + \beta I_2 = O_2.$$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & -3\alpha \\ \alpha & -2\alpha \end{pmatrix}, \beta I_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
- $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+\alpha+\beta & 3-3\alpha \\ -1+\alpha & 1-2\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \alpha+\beta=2 \end{cases}$

- $\alpha = \beta = 1$

10. Să se determine **valorile naturale** ale α astfel încât : $\det(A + \alpha I_2) = 16$,

unde : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

.

- $B = A + \alpha I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & 1 \\ -4 & -2 + \alpha \end{pmatrix}$

- $\det B = 16 \Leftrightarrow (\alpha + 2)(\alpha - 2) + 4 = 16 \rightarrow \alpha^2 - 4 = 12 \rightarrow \alpha^2 = 16 \rightarrow \alpha \in \{-4, 4\}$

- $\alpha = 4$

11. Fie $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^4 + \beta x^3 + 6x + \theta}{(x-1)^3}$. Să se găsească **valorile** parametrilor α, β, θ astfel

încât limita l **să fie finită**.

Fie: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + 6x + \theta, Q(x) = (x-1)^3 \rightarrow \text{grad } P(x) = 4 > \text{grad } Q(x) = 3$

Limita l **este finită** dacă și numai dacă **vom avea o nedeterminare** : $\frac{0}{0}$

În acest caz: $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^4 + \beta x^3 + 6x + \theta) = 0 \rightarrow \alpha + \beta + 6 + \theta = 0$

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^4 + \beta x^3 + 6x + \theta}{(x-1)^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 6}{3(x-1)^2}$$

Limita l **este finită** dacă și numai dacă **vom avea o nedeterminare** : $\frac{0}{0}$

În acest caz: $\lim_{x \rightarrow 1} 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 6 = 0 \rightarrow 4\alpha + 3\beta + 6 = 0$

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 6}{3(x-1)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12\alpha x^2 + 6\beta x}{6(x-1)}$$

Limita l **este finită** dacă și numai dacă **vom avea o nedeterminare** : $\frac{0}{0}$

În acest caz: $\lim_{x \rightarrow 1} 12\alpha x^2 + 6\beta x = 0 \rightarrow 12\alpha + 6\beta = 0 \rightarrow \beta = -2\alpha$

Rezolvăm sistemul:
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \theta = -6 \\ 4\alpha + 3\beta = -6 \\ \beta = -2\alpha \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \theta = -3 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -6 \end{cases}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 6x^3 + 6x - 3}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^3 - 18x^2 + 6}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{36x^2 - 36x}{6(x-1)} = 6 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)}$$

$$6 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)} = 6 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{1} = 6(A)$$

12. Să se **rezolve** : $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

- $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} e^{-t} 2tdt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^{-t} dt = -2e^{-\sqrt{2}} + 2e^{-1} = 2\left(-\frac{1}{e^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{e}\right)$
- Fie **notația** : $\begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt \\ x = 1 \rightarrow t = 1, x = 2 \rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$

Folosim formula: $\int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$

13. Să se **rezolve** : $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2(x+1) + (x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$

$$\bullet \quad \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -B+C=1 \\ B+C=0 \end{cases} \rightarrow A=C=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\bullet \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2, \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2, \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$$

Am folosit formulele: $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \arctg 0 = 0$

14. Să se determine funcțiile derivabile $f, f \neq 0$ care verifică ecuația:

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2} dt$$

Vom deriva ambii membri ai ecuației: $2f(x) \cdot f'(x) = \frac{x \cdot f(x)}{1+x^2}$

$$f(x)(2f'(x) - \frac{x}{1+x^2}) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx + C$$

Deoarece: $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

15. Să se rezolve : $I = \int_{-1}^1 \frac{x+2}{|x|+2} dx$

Considerăm: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x+2}{|x|+2} dx = \int_{-1}^0 \frac{x+2}{2-x} dx + \int_0^1 \frac{x+2}{x+2} dx = 4 \ln \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x+2}{2-x} dx = - \int_{-1}^0 \frac{x+2}{x-2} dx = - \int_{-1}^0 (1 + \frac{4}{x-2}) dx = -x + 4 \ln|x-2| = -1 + 4 \ln \frac{2}{3}$$

ADMITERE IULIE 2016

1. Să se **calculeze**: $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$.

- A. $I = 3$
- B. $I = 4$
- C. $I = 5$
- D. $I = 2$
- E. $I = 1$.

2. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- A. $X = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$
- C. $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- D. $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- E. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Fie $f : D \rightarrow R, f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 + x + 1}$.

Să se **determine parametrul** α știind că $f'(1) = 0$

A. $\alpha = 0$

B. $\alpha = -3$

C. $\alpha = -1$

D. $\alpha = 2$

E. $\alpha = -2$.

4. Se consideră funcția: $f : R \rightarrow R, f(x) = e^x (x^2 + 8x + 6)$.

Atunci o **primitivă** F a **funcției** f este de forma :

A. $F(x) = e^x (x^2 + 6x + 3)$

B. $F(x) = e^x (x^2 + 6x + 1)$

C. $F(x) = e^x (x^2 + 6x + 2)$

D. $F(x) = e^x (x^2 + 6x)$

E. $F(x) = e^x (x^2 + 8x)$.

5. Fie integrala : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$. Atunci :

A. $I_4 + 3I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

B. $I_4 + 3I_3 + I_2 = \frac{1}{3}$

C. $I_4 + I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

D. $2I_4 + I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

E. $I_4 + I_3 + I_2 = \frac{1}{3}$.

6. Una din **soluțiile reale** ale ecuației $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$ este:

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. -1

E. -2

7. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine **valorile parametrilor** reali x, y astfel încât: $A \bullet B = B \bullet A$.

A. $x = -2, y = 3$

B. $x = y = 1$

C. $x = y = -2$

D. $x = -1, y = 2$

E. $x = y = 0$.

8. Să se **calculeze** următoarea limită: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 + \ln x)$.

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

E. -1.

9. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$, în mulțimea numerelor reale:

A. $x = -1$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = 2$

E. $x = -2$

10. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci $A^n, n \geq 1$ este de forma:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n+2} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

E. I_2

ADMITERE IULIE 2017

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

A. $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -3$

B. $x = \frac{4}{3}, y = -2, z = -\frac{1}{3}$

C. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -1$

D. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1$

E. $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -1$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Atunci $f'(0)$ are valoarea:

- A. 2
- B. -2
- C. 1
- D. 0
- E. -1

3. Să se determine numerele reale $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- A. $\alpha = \beta = 1$
- B. $\alpha = \beta = -1$
- C. $\alpha = \beta = -2$
- D. $\alpha = \beta = 0$
- E. $\alpha = \beta = 2$

4. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Să se determine valorile parametrului real m , astfel încât: $\det(A) = -3$, unde prin $\det(A)$ am notat determinantul matricei A .

- A. $m \in \{-1, 1\}$
- B. $m \in \{-3, 3\}$
- C. $m \in \{-2, 2\}$
- D. $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- E. $m \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$. Atunci:

- A. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = -1$
- B. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 0$
- C. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 1$

D. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) = -2$

E. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) = 2$

6. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

E. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Una din **soluțiile** ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ este:

A. $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

E. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 - x^2 + 3 - 2e^x)$

- A. 1
- B. -1
- C. 0
- D. ∞
- E. $-\infty$

9. Să se determine valoarea pozitivă a parametrului real m astfel încât:

$$\int_1^m (2x + 1) dx = 10$$

- A. $m = 12$
- B. $m = 11$
- C. $m = 2$
- D. $m = 3$
- E. $m = 1$

10. Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 0
- D. ∞
- E. $-\infty$

ADMITERE SEPTEMBRIE 2017

1. Se consideră funcția: $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (x^2 - 1)(3 - x)$.

Să se calculeze: $f'(3)$.

A. -3

B. -4

C. -8

D. -5

E. -7 .

2. Să se rezolve ecuația matriceală:

$$2A + \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

A. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & -11 \end{pmatrix}$

E. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 = 2A$ dacă:

A. $x = 1$

B. $x = -4$

C. $x = 4$

D. $x = 2$

E. $x = -2$.

4. Să se calculeze integrala: $\int_1^2 x(3-x)dx$.

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{11}{6}$

D. $\frac{7}{6}$

E. $\frac{13}{6}$

5. Să se calculeze următoarea limită: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 1}{x^3 - x - 5}$.

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

E. 0.

6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Determinați numărul real pozitiv α știind că :

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \ln 3 .$$

A. $\alpha = 2$

B. $\alpha = 12$

C. $\alpha = 1$

D. $\alpha = 3$

E. $\alpha = 4$.

7. Fie matricile: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

Să se rezolve ecuația: $A + X = B$.

A. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

B. $X = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

C. $X = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

D. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

E. $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

A. $x = y = z = 1$

B. $x = y = z = 0$

C. $x = 1, y = 0, z = 0$

D. $x = 0, y = 0, z = 1$

E. $x = 0, y = 1, z = 0$.

9. Fie matricile: $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației:

$\det(A+U) = 2$.

A. $x=1$

B. $x=0$

C. $x=3$

D. $x=5$

E. $x=11$.

10. Să se determine funcția: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(0) = 2$, **știind că** : $f'(x) = 2x + 1$.

A. $f(x) = x^2 + 8x$

B. $f(x) = x^2 + 9$

C. $f(x) = x^2 + x + 2$

D. $f(x) = 3x^2 + 2x$

E. $f(x) = 5^x$.

SIMULARE MARTIE 2018

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$. Determinați o primitivă F a funcției f pentru care: $F(1) = e - 3$

- A. $F(x) = e^x - x^5 - 2$
- B. $F(x) = e^x - x^4 - 2$
- C. $F(x) = e^x - x^3 - 2$
- D. $F(x) = e^x - 3x^2 + 2$
- E. $F(x) = e^x - x^2 - 2$.

2. Se consideră funcția: $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 6}{2x^2 + x - 3}$. Să se calculeze $f'(1)$.

- A. Nu există derivata.
- B. -1
- C. 0
- D. -2
- E. 1.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2$. Să se determine $a \geq 2$, astfel încât: $\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} = 9$

- A. $a = 3$
- B. $a = 4$
- C. $a = 5$
- D. $a = 2$
- E. $a = 6$.

4. Sa se calculeze : $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dx$ (Integrală cu aplicații în **dinamica celulelor canceroase**)

- A. e-1
- B. -2
- C. 2
- D. -1
- E. 0.

5. Să se **determine** funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \theta$ care **verifică** relațiile:
 $f(2) = 9, f'(1) = 2, f''(0) = 8$

- A. $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$
- B. $f(x) = 4x^2 - x + 5$
- C. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
- D. $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$
- E. $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

6. Să se **rezolve** ecuația: $\begin{pmatrix} 2x & 3x+y \\ x-7y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 & 8-y \\ -5 & 4y \end{pmatrix}$

- A. $y = -1, x = 2$
- B. $y = 1, x = 2$
- C. $y = 1, x = -2$
- D. $y = -1, x = -2$
- E. $y = 0, x = 2.$

7. Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea $A^n, n \geq 2$.

- A. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- C. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine matricele A, B știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Să se determine numerele pare care verifică ecuația :

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A. $a = -2$

B. $a = 2$

C. $a = 0$

D. $a = -1$

E. $a = 1$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 = 2A$ dacă:

- A. $x = 1$
- B. $x = -4$
- C. $x = 4$
- D. $x = 2$
- E. $x = -2$.

ADMITERE IULIE 2018

1. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

- A. $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$
- B. $S = \{(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)\}$
- C. $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)\}$
- D. $S = \{(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1)\}$
- E. $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -1)\}$

2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$.

Să se calculeze: $f'(-2)$

A. $f'(-2) = \frac{4}{3}$

B. $f'(-2) = -\frac{5}{3}$

C. $f'(-2) = -\frac{4}{3}$

D. $f'(-2) = \frac{5}{3}$

E. $f'(-2) = -\frac{3}{\sqrt{17}}$

3. Să se calculeze integrala definită: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^4} \sin x \, dx$

A. $I = e$

B. $I = 0$

C. $I = e^2$

D. $I = \frac{\pi}{2}$

E. $I = -\frac{\pi}{2}$

4. Să se determine matricele A, B știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- D. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- E. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. Să se **calculeze** integrala definită: $I = \int_{-2}^1 \frac{9x+2}{x^2+x-6} dx$

- A. $I = 0$
- B. $I = \ln 3$
- C. $I = 1$
- D. $I = \ln 4$
- E. $I = -1$.

6. Se dă matricea : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** $A^n, n \geq 2$.

- A. $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- E. $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}.$

7. Fie funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Atunci:

A. $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = -\frac{1}{4}$

B. $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = 1$

C. $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$

D. $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{4}$

E. $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

8. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$

A. 0

B. $-\infty$

C. 1

D. ∞

E. $\frac{1}{3}$

9. Soluția negativă a ecuației: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix} = -30$ este:

A. -2

B. -4

C. -3

D. -12

E. -23.

10. Fie sistemul:
$$\begin{cases} (m+1)x + y = 0 \\ 3x + (m-1)y = 1 \end{cases}.$$

Să se determine **valorile** parametrului ***m*** astfel încât sistemul să poată fi rezolvat prin **regula lui Cramer**.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

E. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

SIMULARE MARTIE 2019

1. Să se **rezolve** ecuația : $2 \cdot \begin{pmatrix} x & -2y \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

A. $x = 4, y = 0$

B. $x = 3, y = -1$

C. $x = 2, y = 1$

D. $x = 0, y = 1$

E. $x = 1, y = 0$.

2. Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea $A^n, n \geq 2$.

A. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Aflați **soluția naturală** a ecuației : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix} = 0$

A. $x = 2$

B. $x = 3$

C. $x = 1$

D. $x = 4$

E. $x = 5$.

4. Să se **rezolve** ecuația : $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}$

A. $x \in \{-1, 9\}$

B. $x \in \{1, 9\}$

C. $x \in \{1, -9\}$

D. $x \in \{-1, -9\}$

E. $x \in \{1, 3\}$.

5. Să se **rezolve** ecuația: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

A. $X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$

B. $X = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

C. $X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

D. $X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

E. $X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Să se **determine matricele** A, B știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Să se **determine numerele reale** $\alpha, \beta \in R$ cu **proprietatea** că:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

A. $\alpha = \beta = 1$

B. $\alpha = \beta = -1$

C. $\alpha = \beta = -2$

D. $\alpha = \beta = 0$

E. $\alpha = \beta = 2$

8. Să se rezolve sistemul :
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

A. $S = \{(1 - \alpha, 1 - \alpha, 0)\}, \alpha \in R$

B. $S = \{(\alpha, 1 - \alpha, 0)\}, \alpha \in R$

C. $S = \{(\alpha, 1 - \alpha, 1)\}, \alpha \in R$

D. $S = \{(\alpha - 1, 1 - \alpha, 0)\}, \alpha \in R$

E. $S = \{(\alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}, \alpha \in R$

9. Fie funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow R, f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

Să se calculeze $\int (x+1)(x+2) f(x) dx$

A. $x^2 - 3x + C, x \geq 0$

B. $x^2 + x + C, x \geq 0$

C. $x^2 - x + C, x \geq 0$

D. $x^2 + 3x + C, x \geq 0$

E. $x^2 + 2x + C, x \geq 0$

10. Fie funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} x + \alpha, x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 3\alpha, x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Să se determine constanta α , astfel

încât funcția să fie continuă pe R .

A. $\alpha = \frac{1}{2}$

B. $\alpha = -\frac{1}{3}$

C. $\alpha = \frac{1}{3}$

D. $\alpha = -\frac{1}{8}$

E. $\alpha = \frac{1}{8}$.

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$. Atunci **asimptota orizontală** are ecuația :

- A. $y = -1$
- B. $y = 1$
- C. $y = 0$
- D. $y = x + 1$
- E. $y = x - 1$

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ x + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$.

Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ știind că f **admite primitive**

- A. $\alpha = -1$
- B. $\alpha = 2$
- C. $\alpha = -2$
- D. $\alpha = 3$
- E. $\alpha = 1$

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Atunci $f'(0)$ **are valoarea** :

- A. 2
- B. -2
- C. 1
- D. 0
- E. -1

14. Să se **calculeze** : $I = \int_0^1 \frac{4x^2 - 6x}{e^x + 8x^2 + 4x + 4} dx$

- A. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{e+16}$
- B. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{2e}{e+16}$
- C. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{5e}{e+16}$
- D. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{4e}{e+16}$
- E. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{3e}{e+16}$

15. Să se calculeze : $I = \int_0^1 2x \cdot \sqrt[3]{(1+x^2)} dx$

A. $I = \frac{3}{4}(2 \cdot \sqrt[3]{2} + 1)$

B. $I = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{2} - 1)$

C. $I = \frac{1}{4}(2 \cdot \sqrt[3]{2} - 1)$

D. $I = \frac{3}{4}(2 \cdot \sqrt[3]{2} - 1)$

E. $I = (2 \cdot \sqrt[3]{2} - 1)$

SIMULARE MAI 2019

1. Dacă : $\begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}$ atunci **produsul** $x \cdot y$ **are valoarea:**

A. $x \cdot y = -2$

B. $x \cdot y = -3$

C. $x \cdot y = 1$

D. $x \cdot y = 0$

E. $x \cdot y = -1$.

2. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \geq 2$.

A. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$\text{B. } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{C. } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{D. } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{E. } A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} .$$

3. Fie determinantul : $D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **Dacă** $D(\alpha) = D(\beta)$ **atunci:**

$$\text{A. } 3\alpha = \beta$$

$$\text{B. } 2\alpha = \beta$$

$$\text{C. } \alpha = 2\beta$$

$$\text{D. } \alpha = -\beta$$

$$\text{E. } \alpha = \beta .$$

4. Să se **determine numerele impare** care **verifică** ecuația :

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = 3-x .$$

$$\text{A. } x=11$$

$$\text{B. } x=13$$

$$\text{C. } x=3$$

$$\text{D. } x=5$$

$$\text{E. } x=1 .$$

5. Fie matricea : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **Determinați numărul natural α pentru care are loc egalitatea : $\det(A^2) = 36$.**

- A. $\alpha = 2$
- B. $\alpha = 0$
- C. $\alpha = 1$
- D. $\alpha = 3$
- E. $\alpha = 11$.

6. Să se **rezolve** sistemul:
$$\begin{cases} A + B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

- A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- D. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- E. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

7. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f(X) = X^2 - 3X + 5I_2$

Să se **calculeze** : $f(A)$.

- A. $f(A) = -2I_2$
- B. $f(A) = 3I_2$
- C. $f(A) = 2I_2$
- D. $f(A) = -I_2$

E. $f(A) = I_2$.

8. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y = \alpha + 1 \\ 2x + 3y = \alpha - 1 \\ \alpha x + y = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Să se determine **suma valorilor** parametrului real α , pentru care sistemul **este compatibil**.

A. $S = 2$

B. $S = -2$

C. $S = 0$

D. $S = -4$

E. $S = 6$.

9. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, x \in [-1, 0) \\ x, x \in [0, 1] \end{cases}$.

Atunci : $I = \int_{-1}^1 f(x)$ **are valoarea:**

A. $I = \frac{5}{6}$

B. $I = \frac{1}{6}$

C. $I = \frac{7}{6}$

D. $I = \frac{1}{3}$

E. $I = \frac{2}{3}$.

10. Fie funcția $f(x) = \sqrt{x-2}$. Atunci $f'(8)$ **are valoarea :**

A. $f'(8) = 2$

B. $f'(8) = -2$

C. $f'(8) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

D. $f'(8) = 0$

E. $f'(8) = -1$

11. Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 12x$. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{f(x)}$.

A. $l = +\infty$

B. $l = 1$

C. $l = 0$

D. $l = -1$

E. $l = e^2$.

12. Să se **calculeze** : $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x + 1 \right)$.

A. $l = \frac{2}{3}$

B. $l = \frac{4}{3}$

C. $l = \frac{5}{3}$

D. $l = 0$.

E. $l = \frac{7}{3}$.

13. Să se **calculeze** integrala : $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$ (Integrala cu aplicații în **dinamica celulelor canceroase**)

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{5}$

E. 1 .

14. Să se calculeze următoarea **limită** : $l = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$

(Integrala cu aplicații în **dinamica populațiilor**)

A. $l = \frac{\pi}{110}$

B. $l = \frac{\pi}{100}$

C. $l = \frac{\pi}{120}$

D. $l = \frac{\pi}{130}$

E. $l = \frac{\pi}{140}$

15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$. Să se **calculeze** următoarea **limită** :

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^4} \cdot \int_0^t f(x) dx \right)$$

A. $I = \frac{3}{4}$

B. $I = \frac{5}{4}$

C. $I = 0$

D. $I = \frac{1}{4}$

E. $I = \frac{7}{4}$

ADMITERE IULIE 2019

1. Să se **determine numerele impare** care **verifică** ecuația :

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - x$$

- A. $x=11$
- B. $x=13$
- C. $x=3$
- D. $x=5$
- E. $x=1$

2. Fie **determinantul** : $D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Dacă $D(\alpha) = D(\beta)$ **atunci:**

- A. $3\alpha = \beta$
- B. $\alpha = \beta$
- C. $\alpha = 2\beta$
- D. $\alpha = -\beta$
- E. $2\alpha = \beta$

3. Fie **limita:** $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x + \alpha \right)$

Să se **determine valoarea pară** a parametrului α **astfel încât:** $l = 1$.

- A. $\alpha=10$
- B. $\alpha=6$

C. $\alpha = 4$

D. $\alpha = 2$

E. $\alpha = 6$

4. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \end{cases}$

Atunci : $I = \int_{-1}^1 f(x)$ are valoarea:

A. $I = \frac{5}{6}$

B. $I = \frac{1}{6}$

C. $I = \frac{7}{6}$

D. $I = \frac{11}{6}$

E. $I = \frac{13}{6}$

5. Să se determine matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$ care verifică ecuația :

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Să se **rezolve** ecuația **matriceală**: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A. $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Să se **determine** funcția : $f : D \rightarrow R$, pentru care o **primitivă** a sa este **de forma**:

$F(x) = e^x(x^2 + 6x) + C$, unde C este o constantă reală.

A. $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 5)$

B. $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 4)$

C. $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 6)$

D. $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 3)$

E. $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 2)$

8. Fie **integrala** :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx$$

Să se **calculeze** expresia: $J = \sin I + \cos I$, unde $\sin I$, $\cos I$ **reprezintă** funcțiile trigonometrice **sinus și cosinus** aplicate integralei I .

A. $J = 1$

B. $J = -1$

C. $J = \sqrt{3}$

D. $J = \sqrt{2}$

E. $J = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

9. Se **consideră** matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se **calculeze** matricea $A^n, n \geq 2$.

A. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Fie funcția : $f : [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2}$. Atunci $f'(8)$ are valoarea :

A. $f'(8) = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$

B. $f'(8) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

C. $f'(8) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

D. $f'(8) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

E. $f'(8) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

11. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x - 1, & x \leq -1 \\ 2x - 3\alpha, & x > -1 \end{cases}$

Să se determine valoarea negativă parametrului α astfel încât funcția f să fie continuă pe mulțimea numerelor reale.

A. $\alpha = -\frac{1}{4}$

B. $\alpha = -\frac{1}{3}$

C. $\alpha = -\frac{1}{2}$

D. $\alpha = -\frac{1}{6}$

E. $\alpha = -1$

12. Să se calculeze integrala : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x + x^2} dx.$

A. $I = \operatorname{arctg} \frac{8\pi}{3}$

B. $I = \operatorname{arctg} \frac{4\pi}{3}$

C. $I = \operatorname{arctg} \frac{5\pi}{3}$

D. $I = \operatorname{arctg} \frac{7\pi}{3}$

E. $I = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{3}$

13. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ 2x + \alpha, x < 0 \end{cases}$

Să se determine valoarea impară a parametrului α , astfel încât funcția să admită primitive pe multimea numerelor reale.

A. $\alpha = 11$

B. $\alpha = 3$

C. $\alpha = 5$

D. $\alpha = 13$

E. $\alpha = 1$

14. Fie sistemul : $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + \alpha y = 4 \end{cases}$

Să se determine valoarea negativă a parametrului α astfel încât sistemului să nu i se poată aplica regula lui Cramer.

A. $\alpha = -3$

B. $\alpha = -2$

C. $\alpha = -1$

D. $\alpha = -11$

E. $\alpha = -\frac{1}{2}$

15. Să se **calculeze** integrala : $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1 + e^x} dx$.

A. $I = -\sin 2$

B. $I = 2\sin 1$

C. $I = \sin 1$

D. $I = \sin 2$

E. $I = 2\sin 2$.