

**MODELE DE SUBIECTE**

**PENTRU ADMITERE**

**FACULTATEA DE BIOINGINERIE MEDICALĂ**

**DISCIPLINA : MATEMATICĂ**

**IULIE 2019**

**NOTĂ:**

1. Subiectele rezolvate **sunt orientative** și au același **nivel de dificultate** cu cele din **culegerea de teste de admitere 2019** .
2. Subiectele rezolvate **respectă programa** de concurs pentru disciplina **Matematică**.
3. Pentru o mai **bună pregătire** a examenului, **recomandăm** rezolvarea problemelor din **culegerea de teste de admitere 2019** .

**Mihai Ilea**

Department of Medical Biosciences, 'Gr.T.Popa' University of Medicine and Pharmacy,

16 Universitatii Street, 700115, Iasi, Romania, Email: ileamihai2004@yahoo.com

## Model 1

1. Să se găsească **o primitivă**  $F$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ , cu  $F(0) = 3$ .

- Vom spune că funcția  $F(x)$  este **o primitivă** a funcției  $f(x)$  dacă:  $F'(x) = f(x)$
- $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx + C \rightarrow F(x) = \ln|x^2 + 1| + C$
- $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} x^2 + 1 = t \rightarrow 2x dx = dt \\ \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 1| + C \end{cases}$
- $F(0) = 3 \rightarrow 3 = \ln 1 + C \rightarrow C = 3$
- $F(x) = \ln|x^2 + 1| + 3$

2. Să se calculeze integrala:  $\int_0^1 [(x+1)^4 - x^4] dx$ .

- $\int_0^1 [(x+1)^4 - x^4] dx = \int_0^1 (x+1)^4 dx - \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 (x+1)^4 dx - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} - \frac{1}{5} = 6$
- $\int_0^1 [(x+1)^4] dx = \begin{cases} x+1 = t \rightarrow dx = dt \\ x=0 \rightarrow t=1, x=1 \rightarrow t=2 \\ \int_1^2 t^4 dt = \frac{31}{5} \end{cases}$

3. Se consideră funcția :  $f(x) = x^{2009} + x + 1$  . Să se calculeze :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2010}}$

- $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^{2009} + t + 1)dt = \frac{t^{2010}}{2010} + \frac{t^2}{2} + t$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2010}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^{2010} + 1005t^2 + 2010t}{2010t^{2010}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{2010}$

4. Determinați constantele  $\alpha, \beta$  astfel încât:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2(1 - \alpha) + x(-\alpha - \beta) + (1 - \beta)}{x + 1} \right) = 0$
- Avem condiția:  $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x(-1 - \beta) + (1 - \beta)}{x + 1} \right) = 0 \rightarrow -1 - \beta = 0 \rightarrow \beta = -1$

5. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

- Avem **cazul de nedeterminare**:  $\frac{0}{0}$  . **Am folosit**:  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{4}$

6. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} 1 & x & \alpha\beta \\ 1 & \alpha & \beta x \\ 1 & \beta & \alpha x \end{vmatrix} = 0$  ,  $\alpha \neq \beta$

- $\begin{vmatrix} 1 & x & \alpha\beta \\ 1 & \alpha & \beta x \\ 1 & \beta & \alpha x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2(\beta - \alpha) + x(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0$
- $x^2 - x(\beta - \alpha) + \alpha\beta = 0 \rightarrow x \in \{\alpha, \beta\}$

7. Fie matricile:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Să se calculeze:  $(A + B + C)^n, n \geq 3$ .

- $X = A + B + C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

- $X^3 = X^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix}$

- Se demonstrează **prin inducție** că :  $(A + B + C)^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = 4^n I_3$

8. Sistemul de ecuații  $\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  are **numai soluția nulă**  $(0, 0, 0)$  dacă:

- Sistemul de ecuații are **numai soluția nulă**  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

- $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -\alpha^2 + \alpha + 2 \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \{-1, 2\}$

- $\alpha \in R - \{-1, 2\}$

9. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  . Să se **determine**  $\alpha$  astfel încât să fie îndeplinită

următoarea relație :  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

- $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3+\alpha^2 = 4 \\ 2+2\alpha = 4 \end{cases} \rightarrow \alpha = 1$

10. Să se afle **valorile pare** ale parametrului  $\alpha$  pentru care matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$  **nu**

**este inversabilă**

- Matricea:  $A$  **nu este inversabilă**  $\leftrightarrow \det A = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha \in \{1, 2\}$

- $\alpha = 2$  .

## Model 2

1. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 + 3x - 20, \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = -5x^2 - 2x - 2$

- $7x^2 + 5x - 18 = 0 \rightarrow x \in \{-2, \frac{9}{7}\}$

2. Să se calculeze determinantul:  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$

### METODA 1

- **Vom înmulți** prima coloană cu (-1) și o **vom aduna** la coloanele doi și trei.

- $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ yz & z(x-y) & y(x-z) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \\ yz & -z & -y \end{vmatrix}$

- **Vom înmulți** coloana a treia cu (-1) și o **vom aduna** la a doua coloană.

- $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^2 & x+y & x+z \\ yz & -z & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & y-z & x+z \\ yz & y-z & -y \end{vmatrix} = (y-z) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & x+z \\ yz & 1 & -y \end{vmatrix}$

- **Vom înmulți** coloana a treia cu (-1) și o **vom aduna** la prima coloană.

- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -xz & 1 & x+z \\ y(x+z) & 1 & -y \end{vmatrix} = (-xz - yx - yz)$

- $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(z-y)(xy+xz+yz)$$

## METODA 2 : Prin calcul direct

3. Se consideră matricea:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^n, n \geq 2$  este:

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Fie  $A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și polinomul  $f(A) = A^2 - 4A + 4I_3$ . Să se găsească **parametrul**  $x$  astfel încât :  $f(A) = O_3$ .

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$f(A) = O_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 & -4x & x \\ -15 & x+4 & -15 \\ -15 & x & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x \notin R$$

- **Nu putem determina** parametrul  $x$ .

5. Fie matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze numărul:  $\det\left(\frac{1}{81} A^4\right)$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$
- $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$
- $\det\left(\frac{1}{81} A^4\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{81} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{81}$

6. Să se calculeze  $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$  (Integrală cu aplicații în prelucrarea semnalelor)

- Vom folosi formulele:  $\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$
- Vom face notația:  $tg \frac{x}{2} = t \rightarrow x = 2arctgt \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
- $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int \frac{1}{2(t+2)} dt = \ln|t+2| + C$
- $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} + 1 \right| + C$

7. Fie  $f : D \rightarrow R, f(x) = \frac{x+\alpha}{x^2+x+1}$ . Să se determine parametrul  $\alpha$  știind că  $f'(1) = 0$

- $f'(x) = \frac{x^2+x+1-(x+\alpha)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2-2\alpha x+1-\alpha}{(x^2+x+1)^2}$
- $f'(1) = 0 \leftrightarrow -\frac{3\alpha}{9} = 0 \rightarrow \alpha = 0$



8. Să se calculeze  $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ , unde  $x \in \mathbb{R}$  (Integrală cu aplicații în epidemiologie)

- $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx = \begin{cases} x+2 = t \rightarrow dx = dt \\ \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctgt + C \end{cases}$
- $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \arctg(x+2) + C$

9. Fie funcția :  $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$  . Să se calculeze  $f'(9)$  .

- $f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2} (1+x+x^2)' = \frac{2x+1}{1+x+x^2}$
- $f'(9) = \frac{19}{91}$

10. Să se găsească **punctul de minim** al funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1$

- **Punctele de extrem local** se află printre rădăcinile ecuației:  $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 12x^2 - 12x - 24 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$  sunt **puncte critice**
- Pentru  $x \in [-1, 2]$  funcția  $f$  **este decrescătoare**.
- Pentru  $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$  funcția  $f$  **este crescătoare**.
- $x = 2$  (**minim**)  $\rightarrow A(2, -39)$

## Model 3

1. Fie integrala :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$  . Să se calculeze  $S = I_4 + 3I_3 + 2I_2$

- Considerăm:  $I_4 = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} dx$ .

- Deoarece avem o combinație liniară de integrale, vom încerca să scriem toată suma sub o singură integrală astfel:

- $$S = \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \frac{x^2(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2. Fie  $f : D \rightarrow R, f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 + x + 1}$  . Să se determine parametrul  $\alpha$  știind că  $f'(1) = 0$  .

- Folosim formula:**  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

- $$f'(x) = \frac{(x + \alpha)'(x^2 + x + 1) - (x + \alpha)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 + x + 1 - (2x + 1)(x + \alpha)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

- $$f'(1) = \frac{3 - 3(1 + \alpha)}{9} = 0 \rightarrow 3 - 3(1 + \alpha) = 0 \rightarrow 1 - \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0$$

3. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{(x-1)(x+2)}$

- Verificăm dacă avem un caz de nedeterminare:  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 8) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x-1)(x+2) = 0 \end{cases}$

- **Avem cazul de nedeterminare:  $\frac{0}{0}$ . Folosim regula lui L'Hospital**

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^3 + 8)'}{(x^2 + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{2x + 1} = -4.$

4. Fie funcția :  $f: R - \{-3, 1\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$ .

Să se scrie **asimptota orizontală** la graficul funcției.

- Calculăm:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)'}{(x^2+2x-3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{\infty} = 0$
- Vom spune că  $y = 0$  este asimptota orizontală la  $\pm \infty$ .

5. Să se calculeze :  $\int \frac{dx}{x(x+2)}$ .

- $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \rightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A}{x(x+2)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow B=-\frac{1}{2}$
- $\int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$

6. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^n$  este de forma:

- $A^2 = A \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin inducție matematică că:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

7. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  și polinomul  $f(x) = x^2 - 10x + 16$ .

Calculați  $f(A)$

- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2$
- $A^2 = A \bullet A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $f(A) = O_3$

8. Să se calculeze determinantul:  $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

- Adunăm primele doua linii la prima linie :  $\Delta = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$
- $\Delta = (2x+2y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)(xy - y^2 - x^2) = -2(x^3 + y^3)$

9. Să se determine **valorile naturale** ale parametrului  $p$  astfel încât:  $\text{rang}(A + A^t) = 1$ ,

unde:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 4 \end{pmatrix}$

- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2+p \\ p+2 & 8 \end{pmatrix}$
- Matricea  $B$  fiind de ordinul al doilea,  $\text{rang} B = 2 \Leftrightarrow \det B = 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & 2+p \\ 2+p & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 16 - (p+2)^2 = 0 \rightarrow p+2 = \pm 4 \rightarrow p \in \{2, -6\}$
- $p \in N \rightarrow p = 2$ .

10. Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **Adunăm primele doua linii la prima linie** :  $\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$
- $\Delta = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+2)(2x+1-x^2-1-1) = (x+2)(-x^2+2x-1)$
- $\Delta = 0 \rightarrow x \in \{-2, 1\}$
- $x \in N \rightarrow x = 1$

## Model 4

1. Să se calculeze integrala:  $\int_1^2 (x-1)(2-x)dx$

- $I = \int_1^2 (x-1)(2-x)dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx = -\int_1^2 x^2 dx + 3\int_1^2 x dx - 2\int_1^2 dx$
- $I = -\frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{6}.$

2. Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x+1} dx$

- Facem **notația** :  $x+1=t \rightarrow x=t-1 \rightarrow dx=dt$
- Dacă  $x=0 \rightarrow t=1, x=1 \rightarrow t=2$
- $\int_1^2 \frac{1}{t} \ln t = \int_0^{\ln 2} u du = \frac{\ln^2 2}{2}$
- Facem **schimbarea** de variabilă:  $\ln t = u \rightarrow \frac{1}{t} dt = du$
- Dacă  $t=1 \rightarrow u=0, t=2 \rightarrow u=\ln 2$

3. Se dă funcția:  $f(x) = \ln^2(x-3), x \geq 3$ . Să se calculeze  $f'(4)$

- **Folosim formulele:**  $(u^2)' = 2uu', (\ln u)' = \frac{1}{u} u'$ , unde  $u$  este o funcție compusă
- $f'(x) = (\ln^2(x-3))' = 2\ln(x-3)(\ln(x-3))' = 2\ln(x-3) \frac{1}{x-3}$
- $f'(4) = 0$

4. Să se afle **funcția polinomială** de gradul trei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \theta x + \pi$  care verifică relațiile:  $f(-1) = -6$ ,  $f'(1) = -3$ ,  $f''(2) = 4$ .

- $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \theta \rightarrow f'(1) = 3\alpha + 2\beta + \theta = -3$
- $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \rightarrow f''(2) = 12\alpha + 2\beta = 4$
- $f(-1) = -\alpha + \beta - \theta + \pi = -6$
- $$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \theta = -3 \\ 6\alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta + \theta - \pi = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 6\alpha \\ 9\alpha - \theta = 7 \\ 7\alpha + \theta = 8 + \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16\alpha = 15 + \pi \\ \theta = 9\alpha - 7 \\ \beta = 2 - 6\alpha \end{cases}$$
- $\alpha = 1, \beta = -4, \theta = 2, \pi = 1 \rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$

5. Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - 1}$ . Să se determine parametrul  $\alpha$  știind că graficul funcției  $f$  **are asimptota**:  $y = x - 1$ .

- **Folosim formulele pentru asimptote oblice:** 
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$
- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \alpha x}{x(x - 1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \alpha}{2x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\alpha + 1)}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha + 1$
- $\alpha + 1 = -1 \rightarrow \alpha = -2$

6. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  cu  $A \in M_3(\mathbb{R})$

Să se calculeze :  $(A(2) - A(0))^{2016}$

- $$B = A(2) - A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$
- $B^{2016} = (B^3)^{672} = (O_3)^{672} = O_3$

7. Se consideră sistemul:  $\begin{cases} x(x+y+z) = 6 \\ y(x+y+z) = 12 \\ z(x+y+z) = 18 \end{cases}$ . Atunci **soluția naturală** a sistemului este:

- Dacă **adunăm** toate ecuațiile sistemului :  $(x+y+z)^2 = 36 \rightarrow x+y+z = \pm 6$
- Dacă  $x+y+z = 6 \rightarrow x=1, y=2, z=3$
- Dacă  $x+y+z = -6 \rightarrow x=-1, y=-2, z=-3$
- $S = \{(1,2,3)\}$

8. Să se determine matricele  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2A-4B = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5B = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$



9. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & x \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ . Să se determine valorile parametrului  $x$  pentru care matricea  $A$  **nu este inversabilă**.

- $A$  **nu este inversabilă**  $\leftrightarrow \det A = 0$
- $\det A = 0 \leftrightarrow 23 + x = 0 \rightarrow x = -23$
- $A$  **nu este inversabilă**  $\leftrightarrow x = -23$

10. Să se rezolve următoarea ecuație :

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$$

- $\Delta = (1-x)(1-2x)(1-3x) - x^2(1-2x) = (1-2x)(2x^2 - 4x + 1) = 0$
- $x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right\}$

## Model 5

1. Să se rezolve ecuația integrală :  $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt = -6$

- $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt = 3 \int_0^x t^2 dt - 4 \int_0^x t dt - 5 \int_0^x dt = x^3 - 2x^2 - 5x$
- $x^3 - 2x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
- Căutam **soluțiile** ecuației printre **divizorii** termenului liber:  $D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$
- $x \in \{-2, 1, 3\}$

2. Să se calculeze integrala definită:  $\int_2^5 \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} dx$

- Vom face **substituția**:  $x-1=t \rightarrow x=t+1 \rightarrow dx=dt$
- Dacă  $x=2 \rightarrow t=1, x=5 \rightarrow t=4$
- $\int_1^4 \frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 5}{t} dt = \int_1^4 \frac{t^2 + 4}{t} dt = \int_1^4 t dt + 4 \int_1^4 \frac{1}{t} dt = \frac{15}{2} + 8 \ln 2$

3. Să se calculeze limita :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$

- Avem **cazul de nedeterminare**:  $\frac{0}{0}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(2x-1))'}{(x^2+x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2}{3}$

4. Se dă funcția  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ . Să se calculeze  $f'(1)$ .

- Se observă că  $f$  este **continuă** pe  $\mathbb{R}$ .
- $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$
- $f$  este **derivabilă** în punctul  $x = 1$  dacă:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x)$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = 2 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 1$
- **Nu putem calcula**  $f'(1)$

5. Fie funcția:  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ . Să se calculeze  $f'(1)$

- **Folosim formula**:  $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$
- $f'(1) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$

6. Să se rezolve ecuația matricială:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Considerăm  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + 3b \\ c & 2c + 3d \end{pmatrix}$
- $a = c = 0, b = d \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .

7. Să se afle **soluțiile naturale** ale parametrului  $\alpha$  pentru care :**rang A=2** , unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Deoarece  $A \in M_3(R)$ ,  $\text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0$

• 
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 + \alpha - 1 = \alpha(\alpha + 1)$$

•  $\text{rang} A = 2 \rightarrow \det A = 0 \rightarrow \alpha \in \{-1, 0\}$

•  $\alpha \in N \rightarrow \alpha = 0$

8. Să se determine matricele  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

• 
$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3X + 9Y = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 18 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -16 & 22 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

• 
$$\begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{11}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} \end{cases}$$

9. Pentru ce valori ale parametrului  $\alpha$  sistemul de ecuații **nu este de tip Cramer**:

$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y + z = 2 \\ \alpha x + y - z = 0 \\ x - 2y - \alpha z = 3 \end{cases}$$

- Sistemul nu este **de tip Cramer** dacă  $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$$

- Căutam **soluțiile** ecuației printre **divizorii** termenului liber:  $D_4 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$
- $\alpha \in \{-2, -1, 2\}$

10. Să se determine  $X \in M_2(R)$  care îndeplinește proprietățile:

1)  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . iar **suma elementelor** de pe diagonala principală este 1.

- **Considerăm**  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = -1 \\ c(a+d) = 0 \rightarrow c = 0 \vee a+d = 0 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases}$
- Dacă  $c = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1, d^2 = 4 \rightarrow d = \pm 2$
- Dacă  $c = 0, a = 1, d = 2 \rightarrow b = -\frac{1}{3}$
- **Dacă**  $c = 0, a = -1, d = 2 \rightarrow b = -1 \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Dacă  $c = 0, a = -1, d = -2 \rightarrow b = \frac{1}{3}$
- Dacă  $a + d = 0 \rightarrow b(a+d) = 0 \neq -1 (F)$

## Model 6

1. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Atunci  $(A + B)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  este de forma:

- **Notăm**  $C = A + B \rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $C^2 = C \bullet C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$
- $C^3 = C^2 \bullet C = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $C^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = 5^n I_2$ .
- $(A + B)^n = 5^n I_2$

2. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

- $-2x^2 + 10x - 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x \in \{1, 4\}$

3. Se consideră matricile :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  . Să se determine parametrul  $u$  astfel încât :  $AB = uBA$ .

- $X = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix}$
- $Y = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \\ 13 & 13 & 10 \end{pmatrix}$
- $X = uY \leftrightarrow u = 1$

4. Să se determine **numerele reale**  $\alpha, \beta \in R$  cu proprietatea că:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} + 3\beta \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} \alpha + 3\beta^2 & 2\alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta & \alpha^2 + 3\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta^2 = 4 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} \alpha + 3\beta^2 = 4 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha - 6\beta^2 = -8 \\ 2\alpha + 3\beta^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\beta^2 = 3 \rightarrow \beta = \pm 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 5 \end{cases}$
- $\alpha = \beta = 1$

5. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ , și funcția :  $f(A) = A^2 + 2A + I_2$  .

Să se determine  $x$  , astfel încât :  $f(A) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$
- $f(A) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4 & 4x \\ 4x & x^2+4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x^2+4 & 4x \\ 4x & x^2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ 4x = -4 \end{cases} \rightarrow x = -1$

6. Să se calculeze :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$  .

- Avem **cazul de nedeterminare**:  $\frac{\infty}{\infty}$

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(e^x + 1))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

7. Fie integrala :  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$  .

- Aplicăm formula **integrării prin părți**:  $\int_a^b f(x)g(x)'dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

- $$\begin{cases} f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

- $$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = (x^n e^x)_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$$

- $$I_2 + 2I_1 = e$$

8. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 3\alpha, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ . Să se determine constanta  $\alpha$ , astfel

încât funcția să fie **continuă** pe  $\mathbb{R}$

- $f$  este **continuă** pe intervalele  $(-\infty, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ , deoarece este **funcție de gradul 1**.

- Problema se pune în punctul :  $x = \frac{1}{2}$  .

- $f$  este **continuă** în punctul :  $x = \frac{1}{2}$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$

- $$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = 1 - 3\alpha, \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \alpha$$

- $f$  este **continuă dacă** :  $\frac{1}{2} + \alpha = 1 - 3\alpha \rightarrow \alpha = \frac{1}{8}$



9. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$ . Atunci **asimptota oblică** are ecuația :

- **Folosim formulele pentru asimptote oblice:** 
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$
- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{3x^2 + 8x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x + 8} = \frac{2}{\infty} = 0$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{2x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$
- $y = 1$  este **asimptotă oblică** la  $\pm$ .

10. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ . Să se calculeze :  $\int_0^1 f''(x)dx$

- $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$ ,  $f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$
- $\int_0^1 f''(x)dx = \int_0^1 e^x(x+2)dx = e^x(x+2)_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 3e - 2 - (e - 1) = 2e - 1$
- $\begin{cases} f(x) = x + 2 \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$

## Model 7

1. Fie funcția:  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ . Să se calculeze aria marginată de graficul funcției, axa  $xx'$  și dreptele  $x = 0, x = 2$ .

- $A = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) dx = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_0^2 \sqrt{2-x} dx$
- $\int_0^2 \sqrt{x} dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2^3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$
- $\int_0^2 \sqrt{2-x} dx = \begin{cases} 2-x=t \rightarrow dx = -dt, x=0 \rightarrow t=2, x=2 \rightarrow t=0 \\ -\int_2^0 \sqrt{t} dt = \int_0^2 \sqrt{t} dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$
- $A = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

2. Să se calculeze integrala definită :  $\int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) dx$

- $\begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 4 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$
- $\int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) = e^x (x^2 + 4x + 3) \Big|_2^3 - \int_2^3 (2x + 4) e^x dx = 24e^3 - 15e^2 - \int_2^3 (2x + 4) e^x dx$
- $\begin{cases} f(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 2 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$
- $\int_2^3 e^x (2x + 4) = e^x (2x + 4) \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 e^x dx = 10e^3 - 8e^2 - 2(e^3 - e^2) = 8e^3 - 6e^2$
- $\int_2^3 e^x (x^2 + 4x + 3) = 16e^3 - 9e^2$

3. Se consideră funcția :  $f(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ -x^2, x \leq 0 \end{cases}$  . Să se calculeze :  $f'''(0)$

- Se observă că  $f$  este **continuă** în  $x=0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = f(0) = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x, x > 0 \\ -2x, x < 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ -2, x < 0 \end{cases}$
- $f$  este **derivabilă** în  $x=0 : \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f'(x) = 0$
- Vom spune **că există**  $f''$  în  $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f''(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f''(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f''(x) = -2 \rightarrow$  **Nu putem calcula :  $f'''(0)$**

4. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  . Atunci  $f'(0)$  este egal cu :

- $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(0) = 1$

5. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3, x \leq 1 \\ 2x^2, x > 1 \end{cases}$  . Să se afle **asimptota orizontală** la  $+\infty$  a funcției  $f$ .

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$
- Deoarece limita nu este finită, **nu vom avea asimptotă orizontală**.

6. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 4x^2 - 5 + x \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$
- $x \in \{-\frac{5}{4}, 1\}$

7. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  și polinomul  $f(x) = x^2 - 10x + 16$ . Atunci  $f(A)$  este:

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}, 10A = \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}, 16I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 10A + 16I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

8. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze suma:  $A + A^2 + \dots + A^9$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^9 = A^8 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^9 = \begin{pmatrix} 9 & S_1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 135 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- $S_1 = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 27 = \frac{(3+27)9}{2} = 135$

9. Să se rezolve ecuația :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

- **Consideram** :  $X \in M_{2 \times 3}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2a_1 & b+2b_1 & c+2c_1 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ 3a+a_1 & 3b+b_1 & 3c+c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$
- $a_1 = -3, b_1 = 0, c_1 = 3, a = 5, b = -2, c = -4 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. Se consideră matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  . Să se calculeze matricea  $A^{2001}$  .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

- $A^{2001} = A^{2000} A = (A^2)^{1000} A = I_2 A = A$

- $A^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

## Model 8

1. Să se calculeze  $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$  (Integrală cu aplicații în dinamica populațiilor)

- $\frac{x^2}{x^4 - 1} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$
- $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} x^2 + 1 = u \rightarrow 2x dx = du \\ \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{cases}$
- $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx = A \ln|x - 1| + B \ln|x + 1| + \frac{1}{2} C \ln(x^2 + 1) + D \arctg x + c$
- $A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1) = x^2$
- $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 1 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$
- $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \ln|x + 1| + \frac{1}{2} \arctg x + c$

2. Să se calculeze **volumul corpului de rotație** obținut prin rotirea graficului funcției  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  **în jurul axei OX.**

- $V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^1 dx - \pi \int_{-1}^1 x^2 dx = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
- $V = \frac{4\pi}{3}$

3. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2}$

- **Avem nedeterminarea:**  $\frac{0}{0} \rightarrow \begin{cases} ((1+3x)^4)' = 4(1+3x)^3(1+3x)' \\ ((1+4x)^3)' = 3(1+4x)^2(1+4x)' \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(1+3x)^3 - 12(1+4x)^2}{2x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1+4x)^2}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1+4x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(1+3x)^2 - 8(1+4x)}{1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} = 6$

4. Fie funcția :  $g(x) = e^x(x^2 + x)$ . Să se calculeze  $g'(2)$

- $g'(x) = (e^x)'(x^2 + x) + e^x(x^2 + x)' = e^x(x^2 + 3x + 1)$
- $g'(2) = 11e^2$

5. Se dă funcția :  $f(x) = 9x^3 + 5x^2 + 9x + 11$ .

Să se calculeze următoarea limită:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4}$

- $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (9t^3 + 5t^2 + 9t + 11)dt = 9\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + 11x = \frac{27x^4 + 20x^3 + 54x^2 + 132x}{12}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x^4 + 20x^3 + 54x^2 + 132x}{12x^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$

6. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0$  ,  $\alpha \neq \beta$

### METODA 1

- Vom **înmulți prima coloană** cu (-1) si o **vom aduna** la a doua si a treia linie.

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \beta & x - \alpha & x - \beta \\ x^2 & \alpha^2 - x^2 & \beta^2 - x^2 \end{vmatrix} = (x - \alpha)(x - \beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \beta & 1 & 1 \\ x^2 & -x - \alpha & -x - \beta \end{vmatrix}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \beta & x + \beta & x + \alpha \\ x^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \vee x - \beta = 0 \vee (\alpha - \beta) = 0$$

$$\bullet x \in \{\alpha, \beta\}$$

### METODA 2: Prin calcul direct.

7. Să se afle **soluțiile naturale** ale parametrului  $\alpha$  pentru care : **rang A=2** , unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0, \text{unde } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a + 1) = 0 \rightarrow a = 0 \vee a = -1$$

$$\bullet a \in N \rightarrow a = 0$$



8. Fie  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $A^{2006}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
- $A^{2006} = (A^2)^{1003} = (I_3)^{1003} = I_3$

9. Pentru ce valori ale parametrului  $\alpha$  sistemul de ecuații **nu este de tip Cramer**:

$$\begin{cases} x + (\alpha + 1)y + z = 2 \\ \alpha x + y - z = 0 \\ x - 2y - \alpha z = 3 \end{cases}$$

- Sistemul de ecuații **nu este de tip Cramer**  $\Leftrightarrow \det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2(a+1) - 4a - 4 = 0 \rightarrow a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0$$

- $\alpha^2(\alpha + 1) - 4(\alpha + 1) = 0 \rightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - 4) = 0 \rightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 2 \vee \alpha = -2$
- $\alpha \in \{-2, -1, 2\}$

10. Să se **determine matricele**  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet \quad \begin{cases} A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \\
&\bullet \quad \begin{cases} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}
\end{aligned}$$

## Model 9

1. Să se determine  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $f(0)=2$  știind că  $f'(x)=2x+1$

- Folosim **formula**:  $f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int g(x)dx + C$
- $f'(x) = 2x+1 \rightarrow f(x) = \int (2x+1)dx + C = x^2 + x + C$
- $f(0) = 2 \rightarrow f(0) = C = 2$
- $f(x) = x^2 + x + 2$

2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + \alpha x + 1$ . Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  pentru care **tangenta** la graficul funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$  **trece** prin punctul  $M(2, 1)$ .

- Ecuția tangentei în punctul**  $A(x_0, y_0)$  este:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
- $f'(x) = 3x^2 + \alpha \rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 + \alpha, y_0 = f(1) = 2 + \alpha$
- Ecuția tangentei** devine:  $y = (3 + \alpha)(x - 1) + 2 + \alpha$
- $M(2, 1) \in d \Leftrightarrow 1 = (3 + \alpha) + 2 + \alpha \rightarrow 2\alpha = -4 \rightarrow \alpha = -2$

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x + 1}$ . Să se determine parametrul  $\alpha$  știind că graficul funcției  $f$  are **un extrem** în punctul  $x = -3$ .

- $f$  **are un extrem în punctul**  $x_0$  dacă:  $f'(x_0) = 0$
- $f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(x + 1) - (x^2 + \alpha x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \alpha}{(x + 1)^2}$
- $f'(-3) = 0 \rightarrow 9 - 6 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -3$

4. Determinați **constantele**  $\alpha, \beta$  astfel încât:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x + \alpha}{x - 1} - \beta x \right) = \alpha$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x + \alpha}{x - 1} - \beta x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \beta) + x(3 + \beta) + \alpha}{x - 1} = \alpha$
- Limita **este finită**  $\Leftrightarrow 2 - \beta = 0 \rightarrow \beta = 2$

- Pentru  $\beta = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \alpha}{x - 1} = \alpha \rightarrow \alpha = 5$

5. Să se calculeze  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$  (Integrala cu aplicații în dinamica celulelor canceroase)

- Fie **substituția**:  $\ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$
- $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$
- $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$

6. Fie matricile:  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ . Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației:  $\det(A + U) = 2$

- $A + U = \begin{pmatrix} 4+u & -6 \\ 2 & u-3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A + U) = (u + 4)(u - 3) + 12 = 2$
- $u^2 + u - 2 = 0 \rightarrow u \in \{-2, 1\}$
- $u \in N \rightarrow u = 1$

7 Sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2\alpha x + \alpha^2 y + 3z = 3\alpha \end{cases}$  are **soluție unică** dacă:

- Sistemul de ecuații are **soluție unică** dacă:  $\det A \neq 0$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\alpha & \alpha^2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -\alpha^2 + 10\alpha - 9 \neq 0$
- $\alpha \in R - \{1, 9\}$

8. Să se rezolve sistemul:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$
- Considerăm:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rang A = 1 \rightarrow$  **există** un minor de ordin 1 nenul.
- Vom considera  $x$  **variabilă principală** iar  $y, z$  **secundare**
- $x = 1 - y - z \rightarrow S = \{(1 - y - z, y, z), y \in R, z \in R\}$
- Pentru  $y = 1, z = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow S = \{(-1, 1, 1)\}$

9. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^n, n \geq 2$  are forma

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

10. Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației:  $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2$

- $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 \neq 2$
- Ecuația **nu are soluții**.

## Model 10

1. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• 
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -9$$

• 
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 2, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 1, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-9} = 1$$

2. Să se rezolve ecuația : 
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

• 
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 2x, \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 180 \rightarrow 2x^2 - 2x - 180 = 0$$

• 
$$x^2 - x - 90 = 0 \rightarrow x \in \{-9, 10\}$$

3. Să se calculeze determinantul : 
$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

### METODA 1

- Adunăm liniile doi și trei la prima linie

- $$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

• **Vom înmulți coloana unu cu (-1) și o vom aduna la coloanele doi și trei.**

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2b & -b-c-a & 2b \\ 2c & 0 & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

- $$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

**METODA 2: Prin calcul direct**

4. Să se rezolve ecuația : 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Dacă  $A \in M_{m \times n}(R)$ ,  $B \in M_{n \times p}(R) \rightarrow A \cdot B \in M_{m \times p}(R)$

- **Considerăm:**  $X \in M_{2 \times 1}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$

- $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a-2b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ a-2b=1 \\ a=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

- $$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  .Să se calculeze  $A^n, n \geq 2$  .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ .

6. Fie funcția  $f : R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, x < 1 \\ \beta x^2 - 1, x \geq 1 \end{cases}$  . Să se **determine constantele**  $\alpha, \beta$  astfel încât funcția să fie **derivabilă** în punctul  $x_0 = 1$

- $f$  este **continuă** în punctul :  $x = 1$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 1 + \alpha, \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \beta - 1, f(1) = 1 + \alpha$
- $f$  este **continuă dacă** :  $1 + \alpha = \beta - 1 \rightarrow \alpha - \beta = -2$
- $f'(x) = \begin{cases} \alpha, x < 1 \\ 2\beta x, x > 1 \end{cases}$
- $f$  este **derivabilă** în punctul :  $x = 1$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f'(x) \rightarrow \alpha = 2\beta$
- $\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -4 \end{cases} \rightarrow$

7. Să se calculeze  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  (Integrala cu aplicații în dinamica populațiilor)

- **Notăm**  $\arcsin x = t \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$
- $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$



8. Să se calculeze **integrala definită**:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

- $\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x \rightarrow g(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi - 2}{2}$

9. Să se calculeze **volumul corpului de rotație** obținut prin rotirea graficului funcției  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$  în jurul axei OX.

- $V = \pi \int_0^2 f^2(x) \, dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2) \, dx = \pi \int_0^2 x^2 \, dx + 2\pi \int_0^2 1 \, dx = \frac{8\pi}{3} + 4\pi$
- $V = \frac{20\pi}{3}$

10. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^x} + (0,3)^x - 3 \right)$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0$ , **deoarece** :  $0 < \frac{1}{2} < 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (0,3)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{10} \right)^x = 0$ , **deoarece** :  $0 < \frac{3}{10} < 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^x} + (0,3)^x - 3 \right) = -3$

## Model 11

1. Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$

- $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = x \Big|_0^1 + \ln|x^2 + 1| \Big|_0^1 = 1 + \ln 2$
- $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \ln(2e)$

2. Să se calculeze  $\int_{-1}^1 e^x (x^2 + 1) dx$

- Aplicăm formula **integrării prin părți**:  $\int_a^b f(x)g'(x)dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- $$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$
- $$\int_{-1}^1 e^x (x + 2) dx = [(x^2 + 1)e^x] \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 xe^x dx = 2e - \frac{2}{e} - 2 \int_{-1}^1 xe^x dx$$
- $$\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$
- $$\int_{-1}^1 xe^x dx = (xe^x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$
- $$\int_{-1}^1 e^x (x + 2) dx = 2e - \frac{6}{e} = \frac{2e^2 - 6}{e}$$

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha + 2)x, & x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x}, & x > 1 \end{cases}$ . Să se determine constanta  $\alpha$

astfel încât funcția să aibă limită în punctul  $x_0 = 1$ .

- $f$  are limită în punctul  $x = 1$  dacă  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 2\alpha + 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = 1$
- $2\alpha + 2 = 1 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x - 1}$ . Să se determine punctele

$M(x_0, f(x_0))$  de pe graficul funcției  $f$  în care tangenta este paralelă cu dreapta  $y = 2x - 1$ .

- Ecuația tangentei în punctul  $M(x_0, y_0)$  este:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
- Panta tangentei este:  $m_t = f'(x_0)$  iar panta dreptei este:  $m_d = 2$
- Dreptele sunt paralele dacă:  $m_d = m_t$
- $f'(x) = \frac{6x(x-1) - 3x^2 + 2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x_0) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 2}{(x_0 - 1)^2} \rightarrow \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 2}{(x_0 - 1)^2} = 2$
- $x_0^2 - 2x_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow M(0, 2) \\ x_0 = 2 \rightarrow f(2) = \frac{46}{3} \rightarrow M(2, 10) \end{cases}$

5. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$

- Avem cazul de nedeterminare:  $\frac{0}{0}$
- Vom folosi:  $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3\sin x}{1} = 0$

6. Fie sistemul : 
$$\begin{cases} x + ay - 3z = 0 \\ x + ay + az = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$
 . Să se determine parametrul  $a$  ,astfel încât

sistemul să admită **soluții diferite de soluția nulă**

- **Sistemul are soluții diferite de soluția nulă**  $\leftrightarrow \det A = 0$

- $$\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ 1 & a & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

- $a \in \{-3, 2\}$

7. Fie matricea:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix}$ . Să se afle **valorile naturale** ale parametrului  $\beta$  pentru

care :  $\text{rang}(I_3 + A + A^t) = 2$

- Fie  $B = I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 5 \end{pmatrix}$

- $\text{rang} B = 2 \leftrightarrow \det B = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(\beta - 1)^2 = 0 \rightarrow \beta - 1 = 0 \rightarrow \beta = 1.$

8. Să se rezolve ecuația : 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ x+1 & x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ x+1 & x & x-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x - 6 = 0 \rightarrow x = -2.$$

9. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^3$  este de forma:

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^3 = I_3$

10. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^{-1}$  este de forma:

- Deoarece primele două linii ale matricei  $A$  sunt proporționale  $\rightarrow \det A = 0$
- Deoarece  $\det A = 0$  nu putem calcula inversa matricei  $A$

## Model 12

1. Fie funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(x^2 + 2)$ . Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $OX$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$

- $A = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 e^x(x^2 + 2) dx = e^x(x^2 + 2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = 3e - 2 - 2 = 3e - 4$
- $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}, \begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$
- $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

2. Să se calculeze  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx$

- $\begin{cases} f(x) = e^{\arcsin x} \rightarrow f'(x) = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 1-x^2 = t \rightarrow -2x dx = dt \\ -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{t} + C \end{cases}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x} dx$
- $\int e^{\arcsin x} dx = x e^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx$
- $\begin{cases} f(x) = e^{\arcsin x} \rightarrow f'(x) = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$

- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} = \frac{e^{\arcsin x} (x - \sqrt{1-x^2})}{2} + C$

3. Se consideră funcția:  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 6}{2x^2 + x - 3}$ . Să se calculeze  $f'(1)$ .

- $f'(x) = \frac{(2x-4)(2x^2+2x-3) - (x^2-4x-6)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}$
- $f'(1) = \frac{43}{0} = +\infty \rightarrow f$  **nu este derivabilă** în punctul  $x=1$

4. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2015}{x}}}{x}$

- **Limita comută cu funcțiile din tabelul de derivare:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2015}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{2015}{x}}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2015}{x^3}} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2015}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$

5. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & x \in (0, 1) \\ \arctan x, & x \geq 1 \end{cases}$ . Să se determine **constantele**  $\alpha, \beta$

astfel încât **funcția să aibă limită pe  $\mathbb{R}$** .

- **Problema existenței limitei** se pune în punctele:  $x=0, x=1$
- $f$  **este continuă** în  $x=0$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = f(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \sin x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \alpha x + \beta = \beta$ ,  $f(0) = \beta$
- $\beta = 0$
- $f$  **este continuă** în  $x=1$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$

- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \alpha x = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \arctg x = \frac{\pi}{4}$ ,  $f(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\alpha = \frac{\pi}{4}$

6. Se consideră matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze matricea  $A^{2001}$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $A^{2001} = A^{2000} A = (A^2)^{1000} A = (I_2)^{1000} A = I_2 A = A$
- $A^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

7. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3X + 9Y = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 18 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -16 & 22 \end{pmatrix} \\ 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ 3X = \begin{pmatrix} \frac{22}{10} & \frac{33}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{18}{10} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{16}{10} & \frac{22}{10} \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{11}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow$$



8. Sistemul de ecuații  $\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  are **numai soluția nulă**  $(0, 0, 0)$  dacă:

- Sistemul de ecuații **are numai soluția nulă**  $(0, 0, 0) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

- $\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha + 2 \neq 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 \neq 0$

- $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

9. Să se calculeze determinantul:  $\begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

### Metoda 1

- **Vom înmulți cu (-1) coloana 1 și o vom aduna la celelalte coloane**

- $\begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+t & y-x & z-x \\ x & y-x & z-x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} x+t & y+t & z+t \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} x+t & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ .

### Metoda 2: Prin calcul direct

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația :  $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 5$

- $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 5 \rightarrow x^3 + x + 5 = 5 \leftrightarrow x^3 + x = 0 \leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0$

- Singura soluție este:  $x = 0$

## Model 13

1. Să se calculeze  $\int x^3 \ln x dx$ , unde  $x \in (0, +\infty)$

- Aplicăm formula **integrării prin părți**:  $\int_a^b f(x)g'(x)dx = (fg)_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- $$\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^3 \rightarrow g(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$
- $$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

2. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$

- **Folosim formulele**:  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ ,  $\sqrt{x^2} = |x|$
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})} + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}} \end{aligned}$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{|x| + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

3. Să se determine  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  să fie continuă pe  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \beta x, & x > 1 \end{cases}$$

- $f$  este continuă pe intervalele  $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ , deoarece este funcție polinomială
- Problema se pune în punctul :  $x = 1$ .
- $f$  este continuă în punctul :  $x = 1$  dacă:  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 1 + \alpha, \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \beta, f(1) = 2$
- $f$  este continuă dacă:  $1 + \alpha = \beta = 2 \rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$

4. Să se calculeze primitiva :  $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx, x \in (1, 2)$

- $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \rightarrow \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$
- $x(A + B) - 2A - B = 1 \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 1$
- $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = -\int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x - 2} dx = \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + C$

5. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$ . Să se determine  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  știind că  $x = 1$  este punct de extrem, iar  $x = -2$ , este punct de inflexiune pentru funcția  $f$ .

- Un punct  $x_0$  este punct de extrem pentru funcția  $f$  dacă :  $f'(x_0) = 0$
- Un punct  $x_0$  este punct de inflexiune pentru funcția  $f$  dacă :  $f''(x_0) = 0$
- $f'(x) = (2x + \alpha)e^x + (x^2 + \alpha x + \beta)e^x = e^x(x^2 + 2x + \alpha x + \alpha + \beta),$   
 $f'(1) = 3 + 2\alpha + \beta$
- $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + \alpha x + \beta + 2\alpha + 2), f''(-2) = \beta - 2$
- $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \beta = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}, \beta = 2$

6. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$  . Să se calculeze  $A^n, n \geq 2$  .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin inducție matematică că:  $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$

7. Se consideră sistemul:  $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + lz = 2 \end{cases}$  .

Să se găsească valorile parametrului  $l$  astfel încât sistemul sa fie incompatibil.

- Considerăm :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & l \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$
- Sistemul este incompatibil dacă :  $\det A = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$
- $\det A = 0 \rightarrow 3l - 2 = 0 \rightarrow l = \frac{2}{3}$

8. Să se determine  $\alpha \in R$  astfel încât  $A^* = A^{-1}$  ,cu  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha + 3 & 1 \\ -3 & \alpha - 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,

unde  $A^*$  reprezintă matricea adjuncă

- Folosim formula:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$  , unde  $A^*$  reprezintă matricea adjuncă
- $A^* = A^{-1} \leftrightarrow \det A = 1 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha + 3 & 1 \\ -3 & \alpha - 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \leftrightarrow -2\alpha - 13 = 1$
- $\alpha = -7$

9. Să se afle **soluțiile întregi** ale ecuației :  $\begin{vmatrix} x & u & v \\ u & x & u \\ v & u & x \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} x & u & v \\ u & x & u \\ v & u & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^3 - x(2u^2 + v^2) + 2u^2v = 0$
- **Căutăm soluții printre divizorii termenului liber**  $\rightarrow x = v$

10. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

Să se găsească **soluțiile pozitive** ale ecuației:  $\det(A + 2xI_2) = 4$ .

- $B = A + 2xI_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x & 4 \\ 3 & -1+2x \end{pmatrix}$
- $\det B = 4 \leftrightarrow (2x-1)^2 - 12 = 4 \rightarrow 2x-1 = \pm 4 \rightarrow x \in \{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$
- Dar  $x > 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

## Model 14

1. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^3}$

- Avem nedeterminarea  $\frac{0}{0}$ , deoarece:  $\int_0^0 e^{t^2} dt = 0$

- **Am folosit:**  $(\int_0^x f(t) dt)' = f(x)x' - f(0)0' = f(x)$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{3x^2} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = -\frac{1}{3}$$

2. Să se calculeze  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

- **Notăm:**  $e^x = t \rightarrow e^x dx = dt$
- $$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1| + C = \ln(e^x + 1) + C$$

3. Să se găsească **punctul de maxim** al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 2x^2$

- **Punctele de maxim** verifică ecuația:  $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$  Avem **trei puncte critice:**  $-1, 0, 1$
- Pentru  $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$  funcția este **descrescătoare**.
- Pentru  $x \in (-1, 0] \cup [1, +\infty)$  funcția este **crescătoare**.
- $A(0, 0)$  este **punct de maxim**

4. Să se determine **numărul punctelor de inflexiune** pentru funcția:  $f(x) = x^4 - 4x$

- **Punctele de inflexiune** verifică ecuația:  $f''(x) = 0$
- $f'(x) = 4x^3 - 4 \rightarrow f''(x) = 12x^2$
- Se observă că:  $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f$  **este convexă** pe  $\mathbb{R}$
- **Nu avem puncte de inflexiune**

5. Să se calculeze integrala definită :  $\int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx$

- $$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 4 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$
- $$\int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx = e^x(x^2 + 4x + 3) \Big|_2^3 - \int_2^3 (2x + 4)e^x dx$$
- $$\begin{cases} f(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 2 \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$
- $$\int_2^3 (2x + 4)e^x dx = (2x + 4)e^x \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 e^x dx = 10e^3 - 8e^2 - 2(e^3 - e^2) = 8e^3 - 6e^2$$
- $$\int_2^3 e^x(x^2 + 4x + 3)dx = 24e^3 - 15e^2 - 8e^3 + 6e^2 = 16e^3 - 9e^2$$

6. Fie sistemul : 
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
 . Să se găsească **acele soluții**  $(x_0, y_0, z_0)$  ale sistemului **care verifică** relația :  $x_0 + y_0 + z_0 = 4$  .

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$  Avem **un sistem omogen care admite și soluții  $\neq 0$**
- Alegem minorul:  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow x, y$  sunt principale iar  $z$  este secundară
- Sistemul devine: 
$$\begin{cases} x - y = -z \\ x - 2y = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = -z \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$
- $x_0 + y_0 + z_0 = 4 \leftrightarrow 4z_0 = 4 \rightarrow z_0 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow y_0 = 2$
- $S = \{(1, 2, 1)\}$



7. Fie  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  și polinomul  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ . Să se calculeze  $f(A)$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}, 6A = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 6A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $f(A) = O_3$

8. Fie  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $A^{2009}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$
- $A^{2009} = A^{2008} A = (A^2)^{1004} A = (O_2)^{1004} A = O_2 A = O_2$

9. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

### **METODA 1:**

- **Înmulțim cu (-1) prima coloană și o adunăm la celelalte două coloane.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x)$$

- $x(1-x) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 1 \rightarrow x \in \{0,1\}$

### **Metoda 2: Prin calcul direct**

10. Să se determine matricele  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 4A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

## Model 15

1. Să se rezolve ecuația:  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -2 & -1 & x-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -2 & -1 & x-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

2. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$  . Să se **determine parametrii** reali  $\alpha, \beta$  astfel încât **rangul** matricei să fie egal cu 2.

- $\text{rang} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0$

- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\alpha + 2\beta - 3 = 0 \rightarrow \alpha = 2\beta - 3$

- Pentru  $\alpha = 1 \rightarrow \beta = 2$

3. Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  si  $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  . Atunci **suma** :  $\det(A+B) + \det(A-B)$  este egală cu:

- $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; A - B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$
- $\det(A+B) = (a+e)(d+h) - (c+g)(b+f) = ad + ah + ed + eh - cb - cf - gb - gf$   
 $\det(A-B) = (a-e)(d-h) - (c-g)(b-f) = ad - ah - ed + eh - cb + cf + gb - gf$
- $\det(A+B) + \det(A-B) = 2ad - 2bc + 2eh - 2gf = 2(\det A + \det B)$

4. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z - 5y = -1 \\ 8z - y + 4x = 4 \end{cases}$$

- Deoarece  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$  vom aplica **regula lui CRAMER**

- Considerăm:**  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

- $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = -1, y = \frac{\Delta_y}{\det A} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\det A} = 1$

5. Se consideră matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se determine **valoarea** parametrului  $\beta$  astfel încât să fie **adeverată** egalitatea:  $A^3 = 3A^2 + \beta A + I_3$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 = 3 + \beta + 1 \\ 6 = 9 + \beta \\ 3 + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \beta = -3$

6. Determinați **constantele**  $\alpha, \beta$  astfel încât:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - \alpha x \right) = \beta + 3$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \alpha) + x(1 - 2\alpha) + 1}{x + 2} = \beta + 3$

- Pentru ca **limita să fie finită** trebuie ca:  $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{x+2} = \beta + 3 \rightarrow \beta + 3 = -1 \rightarrow \beta = -4$

7. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ . Să se calculeze:  $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$

- $f(x^2) = x^2 e^{x^2} \rightarrow \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} (e^4 - e)$
- $\begin{cases} x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \rightarrow \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} (e^4 - e) \\ x = 1 \rightarrow u = 1, x = 2 \rightarrow u = 4 \end{cases}$

8. Să se găsească **numărul punctelor de extrem** al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- **Punctele de extrem se află printre rădăcinile ecuației:**  $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$  este **punct critic**
- Pentru  $x \in (-\infty, 0]$  funcția  $f$  este **crescătoare**.
- Pentru  $x \in [0, +\infty)$  funcția  $f$  este **descrescătoare**.
- Punctul  $x = 0$  este **punct de minim**, deci este **punct de extrem**
- Avem un singur **punct de extrem**.

9. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$

- **Avem cazul de nedeterminare:**  $\frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{4x-2} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = 1$

10. Să se calculeze  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$  (Integrala cu aplicații în dinamica populațiilor)

- Vom folosi formula:  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C$
- $$\begin{cases} x^4 = u \rightarrow 4x^3 dx = du \\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4} \arcsin u + C \end{cases}$$
- $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$$

## Model 16

1. Numărul punctelor de inflexiune pentru:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1$  este:

- Punctele de inflexiune verifică ecuația:  $f''(x) = 0$
- $f'(x) = 12x^2 - 12x - 24, f''(x) = 24x - 12$
- $f''(x) = 0 \rightarrow 24x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
- Pentru  $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$  funcția este concavă, pentru  $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$  funcția este convexă
- Vom avea un singur punct de inflexiune:  $x = \frac{1}{2}$

2. Fie  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ . Să se calculeze asimptota orizontală spre  $+\infty$

- $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$
- Vom spune că  $y = 0$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$

3. Să se calculeze  $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ , unde  $x \in \mathbb{R}$

- Notăm  $e^x = u \rightarrow x = \ln u \rightarrow dx = \frac{1}{u} du$
- $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \ln|u| - \ln|u+1| + C$
- $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C = x - \ln(e^x + 1) + C$

4. Se consideră funcția:  $f(x) = (x-1)^2(x-3)$  . Să se calculeze  $f'\left(\frac{7}{3}\right)$  .

- Vom folosi formula:  $(fg)' = f'g + fg'$
- $f'(x) = 2(x-1)(x-3) + (x-1)^2 = (x-1)(3x-7)$
- $f'\left(\frac{7}{3}\right) = 0$

5. Să se calculeze integrala:  $\int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx$

- Vom aplica formula:  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \frac{1}{u'}$
- $I = \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx = \int_0^1 2^x dx + \int_0^1 2^{-x} dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 - \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2}$
- $I = \frac{3}{2 \ln 2}$

6. Să se rezolve ecuația:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
- $x \in \{1, 2\}$

7. Să se rezolve sistemul :  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

- Considerăm :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Toți minorii de ordin doi sunt egali cu zero.
- Alegem  $\Delta = 1$  ca minor principal
- Sistemul este compatibil  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0(F)$
- Sistemul este incompatibil



8. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  . Să se calculeze matricea  $A^n, n \geq 2$

$$\bullet \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \text{Se demonstrează prin inducție matematică că: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Fie matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  și funcția:  $f(A) = A^2 - 2A + I_3$  .

Să se calculeze  $f(A)$

$$\bullet \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

10. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} x(x+2) & x+3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -14$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x^2 + 2x & x+3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -14 \rightarrow 4(x^2 + 2x) - 5(x+3) + 14 = 0 \rightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\bullet \quad x \in \left\{-1, \frac{1}{4}\right\}$$

## Model 17

1. Să se calculeze  $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$  (Integrală cu aplicații în dinamica populației)

- $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}) dx = \int dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$
- $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \rightarrow a(x-3) + b(x-2) = 1 \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -3a-2b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$   
 $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int (-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$
- $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$

2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \alpha x + \beta \arctg x$ . Să se determine parametrii  $\alpha, \beta$  știind că  $f'(1) = 2$ ,  $f''(-1) = 1$

- $f'(x) = \alpha + \frac{\beta}{1+x^2} \rightarrow f'(1) = \alpha + \frac{\beta}{2} = 2 \rightarrow 2\alpha + \beta = 4$
- $f''(x) = \frac{-2x\beta}{(1+x^2)^2} \rightarrow f''(-1) = \frac{2\beta}{4} = 1 \rightarrow \beta = 2$
- $\alpha = 1, \beta = 2$

3. Fie funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x \ln x$ . Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $OX$  și dreptele  $x=1$  și  $x=e$

- $A = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e (x^2 + x \ln x) dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^2 + 1}{4}$

- $$\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases} \rightarrow \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

- $$A = \int_1^e |f(x)| dx = \frac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}$$

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{x}$ . Atunci  $f'(1)$  este egal cu :

- $$f'(x) = (2x + 1)\sqrt[3]{x} + (x^2 + x + 1)\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$
- $$f'(1) = 4$$

5. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\ln(x+2) - \ln(x+1)}$

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\ln(x+2) - \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x+2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)}{x} = 1$$
- **Avem cazul de nedeterminare :** 
$$\frac{0}{0}$$
- $$\left(\ln \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{x}{x+1} \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{-1}{x(x+1)} \cdot \left(\ln \frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{-1}{(x+1)(x+2)}$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

6. Să se rezolve următoarea ecuație : 
$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = (1-x)(1-2x)(1-3x) - x^2(1-2x) = (1-2x)(1-4x+2x^2) = 0$$

- $(1-2x)(1-4x+2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-2x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+1=0 \rightarrow x \notin R \end{cases}$
- **Singura soluție este:**  $x = \frac{1}{2}$

8. Să se determine **soluțiile întregi** ale ecuației:  $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ .

### Metoda 1

- **Adunăm ultimile două linii la prima linie**

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

- **Înmulțim prima coloană cu (-1) și o adunăm la liniile doi și trei**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 \\ x & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(-1-x)^2 = 0 \rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$$

- $x \in \mathbb{Z} \rightarrow x = -1$

### Metoda 2 : Prin calcul direct

8. Se consideră sistemul:  $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$ . Să se găsească **o soluție** a sistemului

$(x_0, y_0, z_0)$  astfel încât:  $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$ .

$$\bullet \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Avem un sistem omogen care admite și soluții } \neq 0$$

- Alegem minorul:  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow x, y$  sunt principale iar  $z$  este secundară
- Sistemul devine:  $\begin{cases} x - y = -z \\ x - 2y = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = -z \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$
- $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8 \leftrightarrow 8z_0 = 8 \rightarrow z_0 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow y_0 = 2$
- $S = \{(1, 2, 1)\}$

9. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $A^n, n \geq 2$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos x & 1 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cos x & 1 \end{pmatrix}$
- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\cos x & 1 \end{pmatrix}$

10. Să se calculeze  $f(A)$ , unde:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 7I_2$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, (-5)A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$
- $f(A) = A^2 - 5A + 7I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

## Model 18

1. Fie funcția :  $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 3x^2$ . Atunci  $f$  este convexă pe intervalul:

- Funcția  $f$  este convexă pe un interval  $I$  dacă:  $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$
- $f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = 6x + 6 \rightarrow 6x + 6 \geq 0 \rightarrow x + 1 \geq 0$
- Funcția  $f$  este convexă pentru  $x \in [-1, +\infty)$

2. Fie funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow R, f(x) = x \ln x$ . Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $OX$  și dreptele  $x=1$  și  $x=e$

- $A = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$
- $\begin{cases} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$
- $A = \frac{e^2 + 1}{4}$

3. Să se calculeze  $\int \sin^3 x \cos x dx$

- Facem notația :  $\sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt$
- $\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

4. Fie funcția  $f: R - \{\beta\} \rightarrow R, f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x - \beta}$ . Să se determine constantele  $\alpha, \beta$  astfel încât  $y = 2$  să fie asimptotă orizontală iar  $x = 3$  să fie asimptotă oblică.

- Asimptotă orizontală :  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x + 1}{x - \beta} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha = 2$
- Asimptotă oblică :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x - \beta} = \infty \leftrightarrow 3 - \beta = 0 \rightarrow \beta = 3$

5. Fie funcția  $f: R \rightarrow R, f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$ . Atunci  $f'(0)$  este egal cu :

- $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \rightarrow f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1} (x^2 + 1)'$
- $f'(x) = \frac{2x}{5}(x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} \rightarrow f'(0) = 0$

6. Să se calculeze **determinantul**: 
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

### Metoda 1

- **Adunăm ultimele două linii la prima linie**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

- **Înmulțim cu (-1) prima coloană și o adunăm la doua și la a treia coloană**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ y & z-y & x \\ z & x-z & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & z-y & x-y \\ z & x-z & y-z \end{vmatrix} = -(y-z)^2 - (x-y)(x-z)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z)(-y^2 + 2yz - z^2 - x^2 + xz + xy + yz) = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3$$

### Metoda 2 : Prin calcul direct

7. Se consideră sistemul :

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ (\alpha - 1)x + 2y + \alpha z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine **valoarea parametrului  $\alpha$**  pentru care sistemul **admite și soluții diferite de soluția banală**.

- Sistemul **admite și soluții diferite de soluția banală**  $\Leftrightarrow \det A = 0$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha-1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 6(\alpha-1) - 2\alpha - 8 = 4\alpha - 14 = 0$$

- $$\alpha = \frac{7}{2}$$

8. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze matricea  $A^n, n \geq 2$ .

- $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Să se rezolve ecuația : 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Considerăm**  $X \in M_{3 \times 1}(R) \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- $$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -2$$

- $$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2}, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$



10. Să se afle **valorile pare** ale parametrului  $\alpha$  pentru care matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

**nu este inversabilă**

- **A nu este inversabilă**  $\leftrightarrow \det A = 0$

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha \in \{1, 2\}$

- $\alpha = 2$

## Model 19

1. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10x+12, \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = 3-x^2$

- $x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow x \in \{1, 9\}$

2. Se dă matricea :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $A^n, n \geq 2$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

- Se demonstrează prin **inducție matematică** că:  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3. Să se rezolve sistemul :  $\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

- **Vom trata sistemul** de ecuații matriciale ca un **sistem obișnuit de ecuații**

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \\
& \bullet \quad \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ -2Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Să se determine numărul real  $\alpha$  astfel încât următorul **sistemul să fie compatibil**:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = \alpha \end{cases}$$

- **Considerăm** :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$
- Deoarece  $\Delta \neq 0$ , **sistemul este compatibil**  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$
- $-3\alpha + 5 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{5}{3}$

5. Să se calculeze **rangul** matricei :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Deoarece  $A \in M_{3 \times 4}(R) \rightarrow \text{rang} A \leq 3$
- **Alegem** minorul:  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
- **Deoarece**  $\Delta \neq 0 \rightarrow \text{rang} A = 3$

6. Să se calculeze  $\int \arctg x dx$ , unde  $x \in \mathbb{R}$

- $$\begin{cases} f(x) = \arctg x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \end{cases}$$
- $$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$
- $$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \begin{cases} 1+x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \\ \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \end{cases}$$

7. Să se găsească **punctul de maxim** al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3x^3$

- **Punctele de extrem local** se află printre rădăcinile ecuației:  $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 1 - 9x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 9x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$  sunt **puncte critice**
- Pentru  $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  funcția  $f$  **este crescătoare**.
- Pentru  $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$  funcția  $f$  **este descrescătoare**.
- $x = \frac{1}{3}$  (**maxim**)  $\rightarrow A(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$

8. Să se calculeze  $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$  (**Integrală cu aplicații în dinamica populațiilor**)

- Fie 
$$\begin{cases} x^2 + 1 = u \rightarrow 2x dx = du \\ x = 0 \rightarrow u = 1, x = 1 \rightarrow u = 2 \end{cases}$$
- $$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\sqrt{2^3} - 1)$$
- $$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

9. Să se **determine**  $\alpha \in \mathbb{R}$  știind că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sin x$  **verifică** egalitatea:  $f''(x) - \alpha f'(x) + \alpha f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$
- $2e^x \cos x - \alpha e^x (\sin x + \cos x) + \alpha e^x \sin x = 0 \rightarrow e^x (2 \cos x - \alpha \cos x) = 0$
- $2 \cos x = \alpha \cos x \rightarrow \alpha = 2$

10. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(-3 + \frac{1}{x})$

- **Limita comută cu funcțiile din tabelul de derivare:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(f(x)) = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(-3 + \frac{1}{x}) = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} (-3 + \frac{1}{x})) = \sin(-3) = -\sin 3$

## Model 20

1. Să se afle **numărul punctelor de extrem** local pentru funcția :  $f(x) = x^5 \ln x$

- **Punctele de extrem local** se află printre rădăcinile ecuației:  $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^5 \frac{1}{x} = x^4(5 \ln x + 1)$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 5 \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{1}{5} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$  este **punct critic**
- Pentru  $x \in (\frac{1}{\sqrt[5]{e}}, +\infty)$  funcția f **este crescătoare**.
- Pentru  $x \in (0, \frac{1}{\sqrt[5]{e}})$  funcția f **este descrescătoare**.
- Avem **un singur punct** de extrem local( de minim):  $x = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$

2. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

- **Avem cazul de nedeterminare:**  $\frac{0}{0}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - 1}$ . Să se determine parametrul  $\alpha$  știind că graficul funcției  $f$  are asimptota:  $y = x - 1$ .

- Folosim formulele pentru asimptote oblice: 
$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$
- $$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \alpha}{2x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$
- $$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + \alpha x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\alpha + 1)}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \alpha + 1 = -1$$
- $\alpha = -2$

4. Să se găsească o primitivă  $F$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , cu  $F(0) = 0$ .

- $F$  este o primitivă a funcției  $f$  dacă:  $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$
- $$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x + C$$
- $F(x) = \arctg x + C \rightarrow F(x) = \arctg x$
- $F(0) = 0 \rightarrow C = 0$  ( $\arctg 0 = 0$ )

5. Să se calculeze  $\int \frac{4x^3}{1 + x^8} dx$ , unde  $x \in \mathbb{R}$

- Notăm  $x^4 = u \rightarrow 4x^3 dx = du$
- $$\int \frac{4x^3}{1 + x^8} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctg u + C = \arctg x^4 + C$$

6. Să se rezolve ecuația :  $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$  .

### Metoda 1.

- Vom înmulți prima linie cu (-1) și o vom aduna la liniile 2 și 3.
- $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$
- $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(x+1)+1+x+1=0 \rightarrow x^2+2x+2=0 \rightarrow x \notin R$
- Singura soluție este :  $x = 1$

### Metoda 2

- $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^4 - x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$
- $(x-1)(x^3 + x^2 - 2) = 0 \rightarrow x-1=0 \vee x^3 + x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 1$
- $x^3 + x^2 - 2 = 0 \rightarrow (x^3 - 1) + (x^2 - 1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$
- Singura soluție este :  $x = 1$ .



7. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și matricea :  $B = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $B^{-1}$ .

- **Folosim formulele:**  $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ ,  $C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^*$ ,  $C^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$
- $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Fie  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det C = -1$ ,  $C_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1$ ,  $C_{12} = -2$ ,  $C_{21} = -2$ ,  $C_{22} = 3$
- $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

8. Să se rezolve **ecuația matricială:**  $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- Facem notația  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 2a-b = 1 \rightarrow b = 5 \\ c = 0 \\ 2c-d = 4 \rightarrow d = -4 \end{cases}$
- $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

9. Fie matricea :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Să se afle **valorile parametrilor  $\alpha, \beta$**  astfel încât:  
 $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = O_2$ .

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & -3\alpha \\ \alpha & -2\alpha \end{pmatrix}$ ,  $\beta I_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
- $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+\alpha+\beta & 3-3\alpha \\ -1+\alpha & 1-2\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases}$
- $\alpha = \beta = 1$

10. Să se determine **valorile naturale** ale  $\alpha$  astfel încât :  $\det(A + \alpha I_2) = 16$  ,  
unde :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

- $B = A + \alpha I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 \\ -4 & -2+\alpha \end{pmatrix}$
- $\det B = 16 \leftrightarrow (\alpha + 2)(\alpha - 2) + 4 = 16 \rightarrow \alpha^2 - 4 = 12 \rightarrow \alpha^2 = 16 \rightarrow \alpha \in \{-4, 4\}$
- $\alpha = 4$

11. Să se **rezolve** integrala definită:  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

- $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} e^{-t} 2tdt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^{-t} dt = -2e^{-\sqrt{2}} + 2e^{-1} = 2\left(-\frac{1}{e^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{e}\right)$
- Facem notația :  $\begin{cases} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt \\ x = 1 \rightarrow t = 1, x = 2 \rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$
- Folosim formula:  $\int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$

12. Să se **rezolve** integrala definită:  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2(x+1) + (x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$
- $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -B+C=1 \\ B+C=0 \end{cases} \rightarrow A=C=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$
- $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2, \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2, \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$
- **Am folosit formulele:**  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \arctg 0 = 0$

13. Să se **rezolve** integrala definită:  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2}$

- **Facem notația:**  $e^x = t \rightarrow x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$
- **Stabilim capetele de integrare:**  $x = 0 \rightarrow t = 1, x = \ln 2 \rightarrow t = 2$
- $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2} = \int_1^2 \frac{t}{(t^2 + 2)t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ . Să se **determine o primitivă**  $F$  a funcției  $f$  știind că **graficul acesteia** (al primitivei) **conține** punctul  $M(1, 4)$

- $F$  **este o primitivă a funcției**  $f$  **dacă**:  $F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$
- $F(x) = \int (3x^2 - 4x + 5) dx + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C$
- **Graficul** primitivei **conține** punctul  $M(1, 4) \Leftrightarrow F(1) = 4 \rightarrow C = 0$
- $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

15. Fie funcțiile:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$  și  $F(x) = ax^2 + bx + c$

Să se **determine** constantele reale  $a, b, c$  astfel încât  $F(x)$  să fie **o primitivă** a funcției  $f$ .

- $F$  **este o primitivă funcției**  $f$  **dacă**:  $F'(x) = f(x)$
- $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 2ax + b = 3x - 5 \Leftrightarrow 2a = 3, b = -5 \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -5, c \in \mathbb{R}$

16. Să se **rezolve** integrala definită:  $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$

- Notăm  $\ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 0 \\ x = e \rightarrow t = 1 \end{cases}$
- $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln 2$
- Am folosit:  $\int \frac{u(t)}{u'(t)} dt = \ln|u(t)| + C$

17. Să se **rezolve** integrala definită :  $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx$

- Explicităm modulele :  $|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, x < 1 \end{cases}$  ,  $|x+1| = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$
- $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-2}^{-1} (|x-1| + |x+1|) dx + \int_{-1}^1 (|x-1| + |x+1|) dx + \int_1^2 (|x-1| + |x+1|) dx$
- $\int_{-2}^{-1} (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-2}^{-1} (-x+1-x-1) dx = -2 \int_{-2}^{-1} x dx = 3$
- $\int_{-1}^1 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_{-1}^1 (-x+1+x+1) dx = 2 \int_{-1}^1 dx = 4$
- $\int_1^2 (|x-1| + |x+1|) dx = \int_1^2 (x-1+x+1) dx = 2 \int_1^2 x dx = 3$
- $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx = 10$

18. Să se **rezolve** integrala definită :  $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8+1} dx$

- Facem notația :  $x = -t \rightarrow dx = -dt \rightarrow \begin{cases} x = -9 \rightarrow t = 9 \\ x = 9 \rightarrow t = -9 \end{cases}$
- $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8+1} dx = \int_9^{-9} \frac{t^5}{t^8+1} dt = - \int_{-9}^9 \frac{t^5}{t^8+1} dt = - \int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8+1} dx$
- $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8+1} dx = 0$

19. Să se **calculeze** :  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$

- Facem notația :  $x+1 = t \rightarrow dx = dt$
- $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{t-1}{t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^2} dt = \ln|t| + \frac{1}{t} + C$
- $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

**20.** Fie  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 - [x]}{2x - [x] + 1}$ . Să se calculeze :  $\int_0^2 f(x) dx$

- Explicităm funcția :  $[x] = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+1}, 0 \leq x < 1 \\ 0, 1 \leq x < 2 \end{cases}$ ,
- $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln 3$

**21. Fie**  $F(x) = \int_0^x e^t \ln(1-t+t^2) dt$ . Determinați **punctele critice** ale funcției  $F$ .

- **Punctele critice** ale funcției  $F$  verifică :  $F'(x) = 0$
- $F'(x) = e^x \ln(1-x+x^2) = 0 \rightarrow \ln(1-x+x^2) = 0 \rightarrow -x+x^2 = 0 \rightarrow x=0, x=1$

**22.** Se consideră funcția :  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}$ . Să se **determine**

**parametrii reali**  $\alpha, \beta, \varepsilon$  astfel încât  $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \varepsilon x}{x-1}$  să fie **o primitivă** a funcției  $f$ .

- $F$  **este o primitivă funcției**  $f$  **dacă** :  $F'(x) = f(x)$
- $$F'(x) = \frac{(3\alpha x^2 + 2\beta x + \varepsilon)(x-1) - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \varepsilon x)}{(x-1)^2} = \frac{2\alpha x^3 + x^2(-3\alpha + \beta) - 2\beta x - \varepsilon}{x^2 - 2x + 1}$$
- $F'(x) = f(x) \leftrightarrow \frac{2\alpha x^3 + x^2(-3\alpha + \beta) - 2\beta x - \varepsilon}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}$
  - $\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta = 3 \\ -2\beta = -9 \\ -\varepsilon = -27 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{9}{2}, \varepsilon = 27$

23. Să se calculeze integrala :  $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$

- $x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4 \rightarrow x+2 = t \rightarrow dx = dt \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow t=2 \\ x=2 \rightarrow t=4 \end{cases}$
- $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx = \int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} dt = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}} dt = 2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$
- Notăm  $t^2 + 4 = u \rightarrow 2t dt = du \rightarrow \begin{cases} t=2 \rightarrow u=8 \\ t=4 \rightarrow u=20 \end{cases}$
- $\int_2^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}} dt = \int_8^{20} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_8^{20} u^{-\frac{1}{2}} du = 2(\sqrt{20} - \sqrt{8}) = 4(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

24. Fie  $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Să se **determine parametrul**  $\alpha \in (1,3)$  astfel încât :

$$\int_1^3 f(x) dx = 2f(\alpha)$$

- $\int_1^3 f(x) dx = 2f(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha^2 = \frac{26}{3} \rightarrow \alpha = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$
- Dar  $\alpha \in (1,3) \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{13}{3}}$

25. Să se **calculeze** integrala :  $\int \frac{4x}{x^4+1} dx$

- $\int \frac{4x}{x^4+1} dx = 2 \int \frac{2x}{(x^2)^2+1} dx = 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctgt + C = 2 \arctg(x^2) + C$
- Notăm :  $x^2 = t \rightarrow 2x dx = dt$

## ADMITERE IULIE 2016

1. Să se **calculeze**:  $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$ .

- A.  $I = 3$
- B.  $I = 4$
- C.  $I = 5$
- D.  $I = 2$
- E.  $I = 1$ .

2. Să se **rezolve** ecuatia:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- A.  $X = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- B.  $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$
- C.  $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- D.  $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
- E.  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Fie  $f : D \rightarrow R$ ,  $f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 + x + 1}$ .

Să se **determine parametrul**  $\alpha$  știind că  $f'(1) = 0$

- A.  $\alpha = 0$
- B.  $\alpha = -3$
- C.  $\alpha = -1$
- D.  $\alpha = 2$
- E.  $\alpha = -2$ .

4. Se consideră funcția:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(x^2 + 8x + 6)$ .

Atunci o primitivă  $F$  a funcției  $f$  este de forma :

A.  $F(x) = e^x(x^2 + 6x + 3)$

B.  $F(x) = e^x(x^2 + 6x + 1)$

C.  $F(x) = e^x(x^2 + 6x + 2)$

D.  $F(x) = e^x(x^2 + 6x)$

E.  $F(x) = e^x(x^2 + 8x)$ .

5. Fie integrala :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$  . Atunci :

A.  $I_4 + 3I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

B.  $I_4 + 3I_3 + I_2 = \frac{1}{3}$

C.  $I_4 + I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

D.  $2I_4 + I_3 + 2I_2 = \frac{1}{3}$

E.  $I_4 + I_3 + I_2 = \frac{1}{3}$ .

6. Una din soluțiile reale ale ecuației  $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$  este:

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{2}$

C. 0

D. -1

E. -2



7. Fie matricile:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ . Să se determine **valorile parametrilor** reali  $x, y$  astfel încât:  $A \bullet B = B \bullet A$ .

A.  $x = -2, y = 3$

B.  $x = y = 1$

C.  $x = y = -2$

D.  $x = -1, y = 2$

E.  $x = y = 0$ .

8. Să se **calculeze** următoarea limită:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 + \ln x)$ .

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

E. -1.

9. Să se **rezolve** ecuația:  $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ , în mulțimea numerelor reale:

A.  $x = -1$

B.  $x = 0$

C.  $x = 1$

D.  $x = 2$

E.  $x = -2$

10. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Atunci  **$A^n, n \geq 1$**  este de forma:

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n+2} \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

E.  $I_2$

## ADMITERE IULIE 2017

1. Să se **rezolve** sistemul :

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

A.  $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -3$

B.  $x = \frac{4}{3}, y = -2, z = -\frac{1}{3}$

C.  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -1$

D.  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1$

E.  $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -1$

2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Atunci  $f'(0)$  are valoarea:

- A. 2
- B. -2
- C. 1
- D. 0
- E. -1

3. Să se **determine** numerele reale  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  cu **proprietatea** că:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- A.  $\alpha = \beta = 1$
- B.  $\alpha = \beta = -1$
- C.  $\alpha = \beta = -2$
- D.  $\alpha = \beta = 0$
- E.  $\alpha = \beta = 2$

4. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Să se **determine valorile parametrului real  $m$** , astfel încât:  $\det(A) = -3$ , unde prin  $\det(A)$  am notat **determinantul** matricei  $A$ .

- A.  $m \in \{-1, 1\}$
- B.  $m \in \{-3, 3\}$
- C.  $m \in \{-2, 2\}$
- D.  $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- E.  $m \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

5. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ . Atunci:

- A.  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = -1$
- B.  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 0$
- C.  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 1$
- D.  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = -2$
- E.  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 2$

6. Să se **rezolve** ecuația:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- A.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- B.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- C.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

E.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Una din soluțiile ecuației  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  este:

A.  $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D.  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

E.  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 - x^2 + 3 - 2e^x)$

A. 1

B. -1

C. 0

D.  $\infty$

E.  $-\infty$

9. Să se determine valoarea pozitivă a parametrului real  $m$  astfel încât:

$$\int_1^m (2x + 1) dx = 10$$

A.  $m = 12$

B.  $m = 11$

C.  $m = 2$

D.  $m = 3$

E.  $m = 1$

10. Să se **calculeze** limita:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{2}$

C. 0

D.  $\infty$

E.  $-\infty$

## ADMITERE SEPTEMBRIE 2017

1. Se consideră funcția:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 1)(3 - x)$ .

Să se calculeze:  $f'(3)$ .

- A.  $-3$
- B.  $-4$
- C.  $-8$
- D.  $-5$
- E.  $-7$ .

2. Să se rezolve ecuația :

$$2A + \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

- A.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
- B.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
- C.  $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
- D.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & -11 \end{pmatrix}$
- E.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$

3. Fie  $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^2 = 2A$  **dacă**:

- A.  $x = 1$
- B.  $x = -4$
- C.  $x = 4$
- D.  $x = 2$
- E.  $x = -2$ .

4. Să se calculeze integrala:  $\int_1^2 x(3-x)dx$ .

A.  $\frac{4}{3}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{11}{6}$

D.  $\frac{7}{6}$

E.  $\frac{13}{6}$

5. Să se calculeze următoarea limită:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 1}{x^3 - x - 5}$ .

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

E. 0.

6. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ . Determinați numărul real pozitiv  $\alpha$  știind că :

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \ln 3 .$$

A.  $\alpha = 2$

B.  $\alpha = 12$

C.  $\alpha = 1$

D.  $\alpha = 3$

E.  $\alpha = 4$ .

7. Fie matricile:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $X \in M_2(R)$ .

**Să se rezolve** ecuația:  $A + X = B$ .

A.  $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

B.  $X = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

C.  $X = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

D.  $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

E.  $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**8. Să se rezolve** sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

A.  $x = y = z = 1$

B.  $x = y = z = 0$

C.  $x = 1, y = 0, z = 0$

D.  $x = 0, y = 0, z = 1$

E.  $x = 0, y = 1, z = 0$ .

9. Fie matricile:  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ . Să se afle **soluțiile naturale** ale ecuației:

$\det(A + U) = 2$ .

A.  $x=1$

B.  $x=0$

C.  $x=3$



- D.  $x=5$
- E.  $x=11$ .

**10. Să se determine funcția:**  $f : R \rightarrow R$ , cu  $f(0) = 2$ , **știind că :**  $f'(x) = 2x + 1$ .

- A.  $f(x) = x^2 + 8x$
- B.  $f(x) = x^2 + 9$
- C.  $f(x) = x^2 + x + 2$
- D.  $f(x) = 3x^2 + 2x$
- E.  $f(x) = 5^x$ .

## SIMULARE MATEMATICA –MARTIE 2018

1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - 2x$ . Determinați o primitivă  $F$  a funcției  $f$  pentru care:  $F(1) = e - 3$

- A.  $F(x) = e^x - x^5 - 2$
- B.  $F(x) = e^x - x^4 - 2$
- C.  $F(x) = e^x - x^3 - 2$
- D.  $F(x) = e^x - 3x^2 + 2$
- E.  $F(x) = e^x - x^2 - 2$ .

2. Se consideră funcția:  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 6}{2x^2 + x - 3}$ . Să se calculeze  $f'(1)$ .

- A. Nu există derivata.
- B. -1
- C. 0
- D. -2
- E. 1.

3. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ . Să se determine  $a \geq 2$ , astfel încât:  $\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} = 9$

- A.  $a = 3$
- B.  $a = 4$
- C.  $a = 5$
- D.  $a = 2$
- E.  $a = 6$ .

4. Sa se calculeze :  $\int_{-9}^9 \frac{x^5}{x^8 + 1} dx$  (Integrală cu aplicații în **dinamica celulelor canceroase**)

- A. e-1
- B. -2
- C. 2
- D. -1
- E. 0.

5. Să se **determine** funcția  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \theta$  care **verifică** relațiile:

$$f(2) = 9, f'(1) = 2, f''(0) = 8$$

A.  $f(x) = 4x^2 - 6x + 5$

B.  $f(x) = 4x^2 - x + 5$

C.  $f(x) = x^2 - 6x + 5$

D.  $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$

E.  $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

6. Să se **rezolve** ecuația:  $\begin{pmatrix} 2x & 3x+y \\ x-7y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 & 8-y \\ -5 & 4y \end{pmatrix}$

A.  $y = -1, x = 2$

B.  $y = 1, x = 2$

C.  $y = 1, x = -2$

D.  $y = -1, x = -2$

E.  $y = 0, x = 2$ .

7. Se consideră matricea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se **calculeze** matricea  $A^n, n \geq 2$ .

A.  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D.  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E.  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. Să se **determine matricele**  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- A.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
B.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
C.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
D.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
E.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

9. Să se determine **numerele pare** care **verifică** ecuația :

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- A.  $a = -2$   
B.  $a = 2$   
C.  $a = 0$   
D.  $a = -1$   
E.  $a = 1$  .

10. Fie  $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ . Atunci  $A^2 = 2A$  **dacă**:

- A.  $x = 1$   
B.  $x = -4$   
C.  $x = 4$   
D.  $x = 2$   
E.  $x = -2$  .

## ADMITERE IULIE 2018

1. Să se **rezolve** sistemul: 
$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

A.  $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$

B.  $S = \{(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)\}$

C.  $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)\}$

D.  $S = \{(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1)\}$

E.  $S = \{(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -1)\}$

2. Se dă funcția  $f : R \rightarrow R, f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$ .

Să se **calculeze**:  $f'(-2)$

A.  $f'(-2) = \frac{4}{3}$

B.  $f'(-2) = -\frac{5}{3}$

C.  $f'(-2) = -\frac{4}{3}$

D.  $f'(-2) = \frac{5}{3}$

E.  $f'(-2) = -\frac{3}{\sqrt{17}}$

3. Să se **calculeze** integrala definită:  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^4} \sin x \, dx$

A.  $I = e$

B.  $I = 0$

C.  $I = e^2$

D.  $I = \frac{\pi}{2}$

E.  $I = -\frac{\pi}{2}$

4. Să se **determine matricele**  $A, B$  știind că:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. Să se **calculeze** integrala definită:  $I = \int_{-2}^1 \frac{9x+2}{x^2+x-6} dx$

- A.  $I = 0$
- B.  $I = \ln 3$
- C.  $I = 1$
- D.  $I = \ln 4$
- E.  $I = -1$  .

6. Se dă matricea :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  . Să se **calculeze**  $A^n, n \geq 2$  .

- A.  $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$
- B.  $\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- C.  $\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- D.  $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
- E.  $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$  .

7. Fie funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow R, f(x) = \frac{x}{x+1}$  . Atunci:

- A.  $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = -\frac{1}{4}$
- B.  $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = 1$
- C.  $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$
- D.  $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{4}$
- E.  $\int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{3}$  .

8. Fie  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ .

Să se calculeze limita:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$

- A. 0
- B.  $-\infty$
- C. 1
- D.  $\infty$
- E.  $\frac{1}{3}$

9. Soluția negativă a ecuației:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix} = -30$  este:

- A.  $-2$
- B.  $-4$
- C.  $-3$
- D.  $-12$
- E.  $-23$  .

10. Fie sistemul:  $\begin{cases} (m+1)x + y = 0 \\ 3x + (m-1)y = 1 \end{cases}$ .

Să se determine **valorile** parametrului  **$m$**  astfel încât sistemul să poată fi rezolvat prin **regula lui Cramer**.

- A.  $m \in R \setminus \{-2, 2\}$
- B.  $m \in R \setminus \{-1, 1\}$
- C.  $m \in R$
- D.  $m \in R \setminus \{-3, 1\}$
- E.  $m \in R \setminus \{-1, 3\}$ .